MATEMATICAS

CURSO PREUNIVERSITARIO

EDELVIVES

MATEMÁTICAS

CURSO PREUNIVERSITARIO

MATEMÁTICAS

CURSO
PREUNIVERSITARIO

EDITORIAL LUIS VIVES - ZARAGOZA

© *Editorial Luis Vives, Zaragoza 1967*

Número de Registro: Z. 1.224 - 62

ES PROPIEDAD DEPÓSITO LEGAL Z. 30 - 61 PRINTED IN SPAIN

EDITORIAL LUIS VIVES, P.° Fernando el Católico, 63 - Zaragoza

LECCION PRELIMINAR. - Integración

1. Integral indefinida. — En Aritmética, a cada operación le corresponde otra, llamada *opuesta.* Así, a la suma le corresponde como operación inversa la sustracción, y a la multiplicación, la división.

El pasado curso se estudió una operación matemática, denominada *derivación,* y una variante de ésta que se llama *diferenciación;* pues bien, también es posible definir una operación inversa de la diferenciación, que denominamos *integración.*

Comencemos por recordar que llamamos *diferencial de una función* y = f(x), que designamos por *dy, al producto de su derivada por un incremento de la variable.* Este incremento se denomina diferencial de la variable independiente. Así, pondremos

$$dy = f'(x)\,dx \quad \text{o bien} \quad dy = f'(x)\,\Delta x$$

EJEMPLO: La diferencial de $y = 5x^2 - 4x + 8$, será

$$dy = (10x - 4)\,dx$$

Esto es lo que se designa en Matemáticas con el nombre de *ecuación diferencial,* por tener explícita la operación de la diferenciación.

Esto sentado, decimos que *integración es la operación que se propone hallar una función, cuando se conoce su diferencial,* o su derivada, ya que conociendo ésta, es sumamente fácil escribir aquélla.

Se indica con un signo especial, $\int$; y que se denomina integral indefinida o signo de integración y escribiremos

$$y = \int f(x)\,dx$$

que se lee: y igual a integral indefinida de $f(x)\,dx$.

En general, si

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

equivale a poner

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

con lo que queremos expresar que $f(x)$ es la derivada de $F(x)$.

2. Propiedades. — 1.ª *El signo de integral anula al signo de diferencial.* En efecto, si tenemos

$$dF(x) = f(x)\,dx \quad \text{equivale a} \quad F(x) = \int f(x)\,dx$$

Al mismo resultado se llega si integramos los dos primeros miembros, así

$$\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x)$$

Esta propiedad nos servirá para verificar la prueba de la integración, así:

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \quad \text{pues} \quad d(-\cos x) = \operatorname{sen} x\,dx$$

2.ª *Si una función tiene una integral, tiene infinitas, que se diferencian unas de otras en una constante, que llamaremos constante de integración.* Así:

$$d(3x^2-7x) = (6x-7)\,dx \longrightarrow \int (6x-7)\,dx = 3x^2 - 7x$$

$$d(3x^2-7x+4) = (6x-7)\,dx \longrightarrow \int (6x-7)\,dx = 3x^2 - 7x + 4$$

En general

$$dF(x) = f(x)\,dx \longrightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$$

$$d[F(x)+C] = f(x)\,dx \longrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Es decir, que $f(x)$ tiene por integral a $F(x)$ y también a $F(x) + C$, siendo C una constante cualquiera. Pero como C puede tomar cualquier valor, la integral podrá presentar infinitas formas.

3.ª *La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de los sumandos.* En efecto, vamos a probar que, si $F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$, se tiene

$$\int F(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx \qquad [1]$$

Hagamos la prueba de la integración y resulta:

$$d\int F(x)\,dx = d\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx\right] =$$

$$= d\int f(x)\,dx + d\int g(x)\,dx - d\int h(x)\,dx$$

Pero hemos dicho que la diferenciación y la integración son operaciones opuestas, y que mutuamente se anulan; nos queda

$$F(x)\,dx = f(x)\,dx + g(x)\,dx - h(x)\,dx \Longrightarrow F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$$

que nos prueba que la operación [1] está bien efectuada.

EJEMPLO: Si $y = x^3 - \operatorname{sen} x + 2$

$$\int y\,dx = \int x^3\,dx - \int \operatorname{sen} x\,dx + \int 2\,dx = \frac{x^4}{4} + \cos x + 2x + C$$

Pues

$$d\left[\frac{x^4}{4} + \cos x + 2x + C\right] = \frac{4 \cdot x^3}{4}\,dx - \operatorname{sen} x\,dx + 2\,dx = (x^3 - \operatorname{sen} x + 2)\,dx$$

4.ª *Un factor constante que multiplica a la función que se ha de integrar, se puede sacar fuera del signo de integración.* En efecto, si tenemos

$$\left.\begin{aligned} d\int kf(x)\,dx &= kf(x)\,dx \\ dk\int f(x)\,dx = kd\int f(x)\,dx &= kf(x)\,dx \end{aligned}\right\} \qquad d\int kf(x)\,dx = dk\int f(x)\,dx$$

Lo cual supone

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

3. Integrales inmediatas. —Recordando las derivadas de las funciones fundamentales nos será fácil comprobar las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (du + dv - dt) = \int du + \int dv - \int dt$
2. $\int a\,dv = a\int dv = av + C$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C = \ln u + \ln c = \ln uc$
6. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
7. $\int e^u du = e^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \sec^2 u\,du = \int (1 + \operatorname{tg}^2 u)\,du = \int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
11. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 u)\,du = \int \dfrac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\operatorname{cotg} u + C$

12. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$

13. $\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$

14. $\int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arc\,tg} u + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + C$

Es conveniente retener en la memoria estas integrales llamadas inmediatas para poder calcular integrales, de la misma manera que para facilitar los ejercicios de la división es conveniente saberse de memoria la tabla de multiplicar.

4. Integración por sustitución o cambio de variable. — En general, la integración es operación complicada, por lo que con el fin de hacerla más sencilla en algunos casos, no inmediatos, pero posibles, se recurre a diversos métodos, algunos de los cuales vamos a estudiar aquí, preferentemente con ejemplos.

1.° La $\int \operatorname{tg} x\, dx$ no se encuentra en el cuadro de las integrales que hemos llamado inmediatas, por lo que nos serviremos de un artificio que llamaremos de *cambio de variable.* Pongamos, pues:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx. \text{ Hagamos } \begin{cases} \cos x = u & \text{y diferenciando resulta} \\ -\operatorname{sen} x\, dx = du \end{cases}$$

Ahora, reemplazando, llegamos a una forma que sabemos integrar

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + \ln C = \ln \frac{C}{u}$$

Tan sólo nos resta deshacer el cambio y obtenemos

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln \frac{C}{u} = \ln \frac{C}{\cos x}$$

2.° De la misma manera realizaremos la integral siguiente:

$$\int \frac{dx}{x + 8} \text{ pondremos } \begin{cases} x + 8 = u \\ dx = du \end{cases} \Longrightarrow \int \frac{dx}{x + 8} = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln u + C = \ln (x+8) + C$$

3.° $\int \frac{dx}{2x^2 + 5}$ que podremos poner $\int \frac{dx}{2x^2 + 5} = \int \frac{\frac{1}{5}\, dx}{\frac{2}{5} x^2 + 1}$

Haciendo el cambio $\begin{cases} u^2 = \frac{2}{5}x^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\,x\right)^2 \longrightarrow u = \sqrt{\frac{2}{5}}\,x \\ du = \sqrt{\frac{2}{5}}\,dx \longrightarrow dx = \sqrt{\frac{5}{2}}\,du \end{cases}$

$$\int \frac{dx}{2x^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}\,du}{u^2+1} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\operatorname{arc\,tg} u + C =$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}x + C$$

4.º $\int (4x^3-8x^2+7)^5(3x^2-4x)\,dx$ $\begin{cases} u = 4x^3 - 8x^2 + 7 \quad \text{y diferenciando} \\ du = (12x^2-16x)\,dx = 4(3x^2-4x)\,dx \end{cases}$

Reemplazando nos queda

$$\int (4x^3-8x^2+7)^5(3x^2-4x)\,dx = \int u^5 \cdot \frac{du}{4} = \tfrac{1}{4}\frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{24}(4x^3-8x^2+7)^6 + C$$

5.ª A veces, con una transformación trigonométrica o de otra índole, se consigue hacer integrable una función. Así

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$$ Recordando $\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$, $\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Reemplazando, se tiene:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)dx}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)dx}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\begin{cases} u = 1+\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \\ du = \left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}dx \end{cases} \Longrightarrow 2\,du = \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)dx$$

Por consiguiente:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{2\,du}{u^2} = 2\int u^{-2}\,du = 2\,\frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

5. Integración por partes. — Si u y v son dos funciones de x, sabemos que

$$duv = udv + vdu \quad \Longrightarrow \quad udv = duv - vdu$$

Si aplicamos el signo de integral a ambos miembros, obtenemos

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Fórmula que tiene múltiples aplicaciones.

Veamos varios ejemplos:

1.° $\int x \operatorname{sen} x\,dx \quad \begin{cases} x = u \longrightarrow & dx = du \\ \operatorname{sen} x\,dx = dv \longrightarrow & -\cos x = v \end{cases}$

con esto estamos en el caso anterior, pues conocemos u, v y dv

$$\int \underset{u}{x} \underset{dv}{\operatorname{sen} x\,dx} = \underset{u}{-x} \underset{v}{\cos x} + \int \underset{v}{\cos x\,dx} = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2.° $\int x\,e^{ax}\,dx \quad \begin{cases} u = x \longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{ax}\,dx \longrightarrow & v = \dfrac{e^{ax}}{a} + C \end{cases}$

$$\int \underset{u}{x} \underset{dv}{e^{ax}\,dx} = \underset{u}{x} \underset{v}{\frac{e^{ax}}{a}} - \int \underset{v}{\frac{e^{ax}}{a}}\,\underset{du}{dx} = \frac{x\,e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C$$

3.° $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$, reemplacemos

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

y entonces

$$\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{x}{\cos^2 x} - x\right) dx = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} - \int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$$

Veamos de integrar el segundo sumando. Para ello hagamos

$$\left.\begin{aligned} u = x &\longrightarrow du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} &\longrightarrow v = \operatorname{tg} x \end{aligned}\right\}$$

y llevándola a la integral

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \underset{\substack{\downarrow \\ u}}{x} \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{\operatorname{tg} x} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{\operatorname{tg} x}\, \underset{\substack{\downarrow \\ du}}{dx} = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C$$

Queda en definitiva

$$\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx = -\frac{x^2}{2} + x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C$$

4.º $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$, pongamos

$$\left.\begin{aligned} u = \cos^2 x &\longrightarrow du = 2 \cos x \operatorname{sen} x\, dx \\ dv = \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx = \operatorname{sen}^4 x\, d \operatorname{sen} x &\longrightarrow v = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} \end{aligned}\right\}$$

De aquí

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx = \underset{\substack{\downarrow \\ u}}{\cos^2 x}\, \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}} - \int 2\, \frac{\cos x \operatorname{sen}^6 x}{5}\, dx$$

Pero

$$\frac{2}{5} \int \cos x \operatorname{sen}^6 x\, dx = \frac{2}{5} \int \operatorname{sen}^6 x\, d \operatorname{sen} x = \frac{2}{5} \cdot \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$$

Queda pues

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{5} \cos^2 x \operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{35} \operatorname{sen}^7 x + C$$

6. Determinación de la constante de integración. — La integral indefinida aquí estudiada lleva una constante de integración, que es indeterminada y que a veces será necesario determinar, para poder obtener la función que se busca y que es única entre las infinitas que satisfacen a la integral.

Para ello será necesario conocer de antemano algunas condiciones a las que ha de satisfacer la función buscada. Veamos algunos ejemplos:

I. Encontrar una función cuya derivada primera sea $3x^2 - 2x + 5$ y que toma el valor 12 para $x = 1$.

Solución. — La función buscada es una de las integrales de la dada. Por consiguiente

$$\int (3x^2 - 2x + 5)\, dx = x^3 - x^2 + 5x + C$$

Pero esta función debe tomar el valor 12 para $x = 1$, luego

$$12 = 1 - 1 + 5 + C = 5 + C \Longrightarrow C = 7$$

La función buscada es $x^3 - x^2 + 5x + 7$.

II. Un cuerpo se mueve con aceleración constante de 7 m/seg², ¿cuál es su velocidad al cabo de 10 segundos, si para $t = 0 \longrightarrow v = 8$ m/seg?

Solución. — Puesto que sabemos que $\frac{dv}{dt} = a$, se tiene $dv = adt$. Se busca, pues, una integral determinada de adt. Veámoslo

$$v = \int adt = a \int dt = at + C$$

Pero para $t = 0$, $v = 7 \cdot 0 + C = 8 \Longrightarrow C = 8$

La velocidad buscada es

$$v = 7 \cdot 10 + 8 = 78 \text{ m/seg}$$

7. Diferencial de un área. — Sea una función que viene representada por la curva *HDB*, en la que señalamos la ordenada fija $HL = f(a)$ y otra variable $DM = f(x) = y$.

Es evidente que al variar x varía la superficie del cuadrilátero mixtilíneo *LHDM* y que a un incremento Δx de la variable, le corresponde otro a la superficie, que viene representada por *MDBN*. Esto quiere decir que el área A de la figura es una función de x, por lo que podemos poner:

$$A = S(x) = LHDM$$

y

$$\Delta_A = LHBN - LHDM = MDBN$$

Pero a la vista de la figura, se tiene

$$MABN > \Delta_A > MDCN \longrightarrow NB \cdot \Delta_x > \Delta_A > MD \cdot \Delta_x$$

Puesto así, se tiene

$$NB > \frac{\Delta_A}{\Delta_x} > MD$$

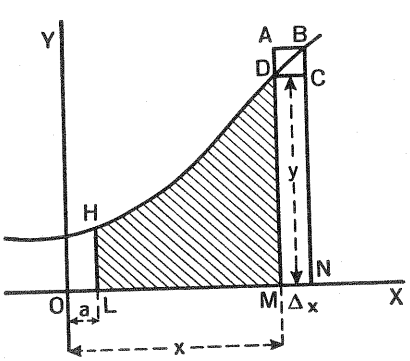


FIG. 1

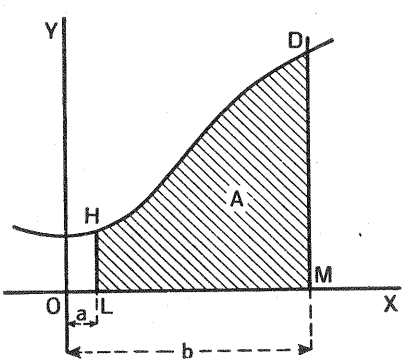


FIG. 2

Si hacemos tender Δ_x a cero, $NB \longrightarrow MD = y$, y por consiguiente

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_A}{\Delta_x} = \frac{dA}{dx} = y \quad \longrightarrow \quad dA = y\,dx$$

Lo cual significa que *la diferencial del área limitada por una curva cualquiera, el eje de las* x, *una ordenada fija y otra variable, es igual al producto de la ordenada variable por la diferencial de las abscisas.*

Obsérvese que $y\,dx$ es el área de un rectángulo infinitesimal.

8. Integral definida. — Sea $y = f(x)$ la curva de la figura 2 y A el área encerrada *LHDM*. Veamos cómo se halla esa área.

Volvamos a la figura 1, y en ella

$$A = S(x)$$

y

$$dA = y\,dx$$

Por consiguiente, el área A es una de las integrales indefinidas que se obtienen al integrar $y\,dx$. Pero obsérvese que al hallar esa integral, obtenemos el área que media desde $x = a$, hasta $x = x$, lo cual se indica de la siguiente manera

$$A = \int_a^x y\,dx = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C = S(x)$$

Siendo $F(x)$ una integral cualquiera obtenida al hacer la integración; si deseamos hallar el área de la figura 1, debemos determinar la constante de integración. Para ello procederemos así: hacemos $x = a$ y entonces evidentemente $S(a) = 0$, porque representa el área una línea *LH*. Por consiguiente

$$A_a = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C = S(a) = 0 \Longrightarrow C = -F(a)$$

El área buscada será, pues

$$A = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

Si ahora deseamos hallar el área de la figura 2, será suficiente hacer $x = b$ en la fórmula que nos da la superficie de la figura 1. Así, tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se denomina *integral definida,* y según hemos visto *representa el área limitada por una curva* y = f(x), *dos ordenadas fijas en* x = a *y* x = b *y el eje de las* x. Los valores *a* y *b* se denominan *límites de la integración.*

Calcularemos una integral definida: 1.° *Hallando la integral indefinida de la expresión diferencial dada.* 2.° *Sustituyendo en esta integral indefinida primero el límite superior de la variable y luego el límite inferior, y restando de aquel valor, éste.*

El método de cambio de variable se aplica también a las integrales definidas, pero en este caso ha de tenerse en cuenta que se han de cambiar los límites simultáneamente. Veamos la manera de hacerlo con un ejemplo:

$$\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\,dx, \text{ mediante el cambio } \begin{cases} x = u^4 \longrightarrow dx = 4u^3\,du \\ x^{\frac{1}{4}} = u \quad \text{y} \quad x^{\frac{1}{2}} = u^2 \end{cases}$$

Para cambiar los límites, se pone

$$\text{Para } x = 0 \longrightarrow u = 0$$
$$\text{Para } x = 16 \longrightarrow u = \sqrt[4]{16} = 2$$

Luego

$$\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_0^2 \frac{u}{1+u^2}\,4u^3\,du = 4\int_0^2 \left(u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}\right)du =$$

$$= 4\left[\frac{u^3}{3} - u + \operatorname{arc\,tg} u\right]_0^2 = \frac{32}{3} - 8 + 4\operatorname{arc\,tg} 2$$

9. La integración definida como operación de suma. — Sea $y = f(x)$ la curva de la figura 3. Dividamos el intervalo (a, b) en n partes y por un punto cualquiera de cada intervalo parcial, trácese una ordenada q. Entonces la superficie *KLHP* queda dividida en trapecios mixtilíneos. Trazadas por el extremo de cada ordenada una paralela al eje de abscisas, se tiene que el área de cada trapecio mixtilíneo se aproxima a la de su rectángulo correspondiente y la del trapecio total a la suma de las áreas de todos los rectángulos, es decir,

Área *KLHP* es aproximadamente igual a

$$q_1\Delta_{x_1} + q_2\Delta_{x_2} + q_3\Delta_{x_3} + q_4\Delta_{x_4} = \sum_{h=1}^{h=n} q_h\Delta_{x_h}$$

Si hacemos el número n de incrementos Δ_x crecer indefinidamente, de manera que cada uno tienda a cero, podemos afirmar, viendo la figura, que la suma anterior representa el área de *KLHP*, es decir, que podemos poner

$$A = \lim_{\substack{\Delta_x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{h=1}^{h=n} q_h\Delta_{x_h}$$

Pero entonces $A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{h=1}^{h=n} q_h\Delta_{x_h}$ según vimos anteriormente.

Esto nos da a entender que *la integral definida* $\int_b^a f(x)\,dx$, *equivale a la suma de infinitos sumandos, siendo cada uno de ellos infinitésimo.*

Esta es una nueva forma de interpretar la integral definida.

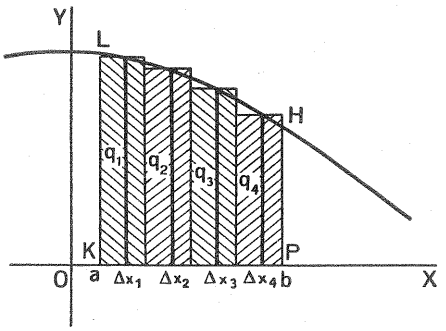


FIG. 3

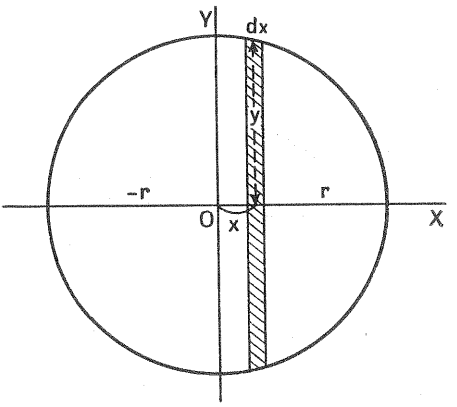


FIG. 4

10. Aplicación de las integrales. — Una de las aplicaciones inmediatas de la integración es hallar volúmenes y superficies de cuerpos, especialmente de revolución. Veamos algunos ejemplos:

1.° *Volumen de la esfera.* Divídase la esfera (fig. 4), en segmentos esféricos cuya altura sea dx, muy pequeña, por lo que se les puede considerar en el límite, como cilindros, cuyo radio de la base es y y la altura es dx, según se ha dicho.

El volumen de uno cualquiera de ellos será

$$dV = \pi y^2 dx$$

y el volumen total será la suma de todos los que se pueden formar, de modo que en cada uno, dx tiende a cero, y que según sabemos es una integral definida entre $-r$ y r, por lo tanto, la calcularemos como sigue

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r}$$

$$V = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \pi \frac{2 \cdot 2 r^3}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

2.° *Volumen del elipsoide.* Haciendo las mismas consideraciones, se tiene

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2} dx$$

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2 a - \frac{a^3}{3} + a^2 a - \frac{a^2}{3} \right]$$

$$V = \frac{\pi b^2}{3 a^2} 4 a^3 = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$

Hemos tenido en cuenta que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ deducida de la ecuación de la elipse.

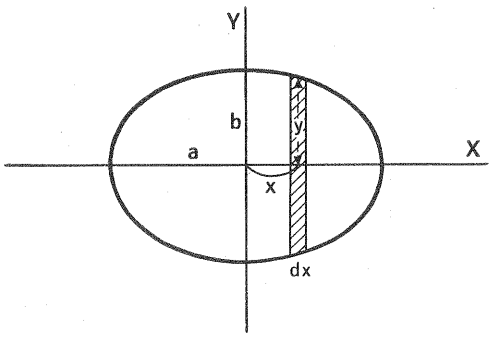


FIG. 5

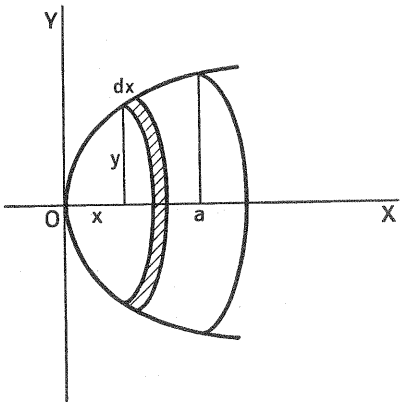


FIG. 6

3.° *Hállese el área del paraboloide.* Se llama paraboloide el cuerpo de revolución que engendra una parábola que gira alrededor de su eje.

Descomponiéndolo en segmentos, por medio de cortes normales al eje, como se indica en la figura 6, cuando la altura de los segmentos dx es muy pequeña, se les puede considerar como cilindros, cuyo radio de la base y y cuya altura es dx. Por consiguiente, el área total, será la suma de los áreas laterales de esos cilindros de alturas infinitesimales. Así, si la ecuación de la parábola es $y^2 = 2px$

$$S = \int_0^a 2\pi y\, dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\, dx = \left[2\pi\sqrt{2p}\, \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi\sqrt{2p}\, \frac{2}{3}\sqrt{a^3} = \frac{4\pi a}{3}\sqrt{2pa}$$

Las aplicaciones del cálculo integral son innumerables, algunas de las cuales se verán en el estudio de la Física.

1. Conjuntos. Número natural. Concepto de semianillo

1. Conjuntos: Su determinación. — La reunión de varios entes de cualquier naturaleza que sean, forman un *conjunto* o pluralidad; por ejemplo, los alumnos del primer curso.

Uno de estos entes considerado aislado de los demás, constituye un *elemento* de ese conjunto.

Expresaremos que los elementos a, b, c, d forman el conjunto A escribiendo:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

y expresaremos que a pertenece y f no pertenece al conjunto A, con las notaciones

$$a \in A \qquad f \notin A$$

Un conjunto puede definirse o determinarse de varias formas:

a) Representando cada elemento, por ejemplo:

$$D = \{\times, \ -, \ +, \ :, \ \leq, \ \sqrt{\ }\}$$

es un conjunto de signos empleados en Matemáticas.

b) Nombrando cada elemento, así el conjunto de alumnos del Preuniversitario se expresa:

$$P = \{Luis, \ Antonio, \ Pedro, \ ...\}$$

c) Más frecuentemente, expresando una propiedad (p) característica del conjunto, es decir, que la posean todos sus elementos y sólo ellos. Por ejemplo, si el conjunto C está constituido por todos los puntos que distan 10 cm. de un punto fijo O, mientras que en este caso sería imposible utilizar los métodos *a)* y *b)*, el procedimiento *c)* nos da la siguiente representación de C:

$$C = \{M \mid OM = 10 \text{ cm.}\}$$

que se lee: C *es el conjunto de todos los puntos* M, *tales que* OM = 10 *cm.*

Un conjunto B está incluido en A cuando todos los elementos de B pertenecen a A, y se expresa $B \subset A$, que se see: B *está incluido en* A.

Esto mismo se puede expresar mediante la siguiente notación:

$$B \subset A \iff \forall\, x \in B \Longrightarrow x \in A$$

que leeremos: *El hecho de que* B *esté incluido en* A, *implica doblemente que cualquier elemento* x *perteneciente a* B, *necesariamente ha de pertenecer a* A.

Implica doblemente equivale a *ser necesario* y *suficiente.* Los signos $\forall$ (cualquiera que sea) y $\in$ (pertenece a) se llaman *cuantificadores.*

Dos conjuntos, A, B *son iguales cuando todo elemento que pertenece a uno de ellos, también pertenece al otro.*

Con cuantificadores se expresará

$$A = B \iff \forall\, x \in A \Longrightarrow x \in B \quad \text{y} \quad \forall\, x \in B \Longrightarrow x \in A$$

Esta igualdad definida entre conjuntos goza de las siguientes propiedades:

REFLEXIVA O IDÉNTICA, es decir, $A = A \qquad \forall\, A$

SIMÉTRICA $\quad (A = B) \Longrightarrow (B = A)$

TRANSITIVA $\quad (A = B)$ y $(B = C) \Longrightarrow (A = C)$

Esta última se lee: $A = B$ y $B = C$ implica que $A = C$.

2. Correspondencia y aplicación entre conjuntos. — Dados los conjuntos $A = \{x_i\}$ y $B = \{y_i\}$, si un elemento cualquiera $x \in A$ se corresponde con otro u otros $y \in B$ variable al variar x, se dice que entre A y B existe una correspondencia, o bien que existe una *aplicación* de A en B. Para expresar esta correspondencia se emplean las siguientes notaciones:

$$x \in A \longrightarrow y \in B \quad \text{o bien} \quad x \overset{f}{\longrightarrow} y \quad \text{y} \quad f : A \longrightarrow B \qquad [1\text{-a}]$$

que se leen: x perteneciente al conjunto A se corresponde con y, perteneciente a B. O bien: x se corresponde o transforma en y mediante la aplicación f. Y finalmente: Mediante la aplicación f los elementos de A se corresponden o transforman en los de B. Muy a menudo y se reemplaza por $f(x)$ y entonces f sigue definiendo la aplicación.

En todo caso x es la variable e y la *transformada* o *imagen* de x en B, mediante la correspondencia f de los elementos de A en B.

Cuando dos elementos cualesquiera x_1 y x_2 de A, distintos, tienen imágenes distintas en B, la aplicación se denomina *unívoca directa,* y al revés, cuando dos elementos cualesquiera y_n e y_m de B son imágenes de antecedentes distintos, la relación o aplicación se denomina *unívoca inversa,* y finalmente, una correspondencia o aplicación a la vez unívoca directa e inversa, se dice *biunívoca.*

EJEMPLOS: Cuando los alumnos de una clase ocupan cada uno su asiento, se hace una aplicación del conjunto alumnos sobre el conjunto asientos, que será biunívoca si cada alumno tiene su asiento y cada asiento pertenece a un solo alumno.

En el esquema, fig. 1-1, el conjunto A se aplica sobre el B con aplicación unívoca directa, mientras que el conjunto A_1 de la figura 1-2 y el B_1 tienen una aplicación unívoca inversa. En ambos casos, todos los elementos del conjunto M y M_1 no tienen necesariamente imagen. El subconjunto A, formado por todos los elementos que tienen imagen, mediante la aplicación f, se denomina *conjunto o dominio de definición de la correspondencia.*

Cuando A es idéntico a B, la correspondencia sería de A sobre sí mismo.

La aplicación biunívoca de A sobre B se llama *coordinación,* se expresa $A \overline{\wedge} B$ y goza de las **propiedades:**

REFLEXIVA O IDÉNTICA	$\forall A \Longrightarrow A \overline{\wedge} A$
SIMÉTRICA	$A \overline{\wedge} B \Longrightarrow B \overline{\wedge} A$
TRANSITIVA	$A \overline{\wedge} B$ y $B \overline{\wedge} C \Longrightarrow A \overline{\wedge} C$

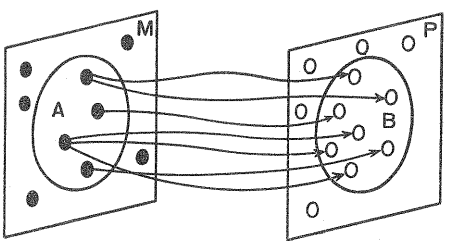


FIG. 1-1

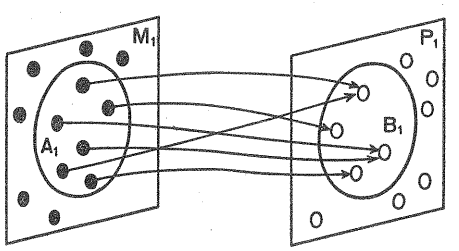


FIG. 1-2

3. Operaciones en los conjuntos. — En general, se ha visto que al aplicar un conjunto A sobre otro B, resulta un tercer conjunto C, formado por las parejas, antecedente e imagen (a, b).

Llamamos operación F entre los conjuntos A y B, a la aplicación del conjunto de parejas que resulta de $A \longrightarrow B$ (que indicaremos $A \times B$) en otro conjunto C.

Cuando los conjuntos están formados por números, las operaciones se llaman aritméticas. Veamos los casos que pueden ocurrir:

a) Cuando la operación viene definida por $A \times A \longrightarrow A$, se llama *interna* o *ley de composición interna.*

Operaciones internas son la suma y la multiplicación en los conjuntos N (números naturales), Z (números enteros), Q (números racionales) y R (números reales), pues el producto o suma de dos números enteros es otro número entero, etc.

En cambio, el cociente de dos números enteros, generalmente no es entero, sino racional, por lo que la división no es operación interna en Z.

b) Cuando la operación es $A \times B \longrightarrow B$ o $A \times B \longrightarrow C$, se llama *operación de composición externa.* En *el primer* caso A se llama *dominio de operadores.*

Así el producto vectorial $[\vec{V} \cdot \vec{V}] \longrightarrow \vec{V}$ de vectores libres, es operación interna, mas no el producto escalar $\vec{V} \cdot \vec{V} \longrightarrow Q$ de vectores, que es operación externa. $\vec{V}$ representa el conjunto de vectores libres y Q el conjunto de números racionales Y $n\vec{V} \longrightarrow \vec{V}$ es una operación externa cuyo dominio de operadores es $\forall n \in Z$.

Cuando en un conjunto se ha definido una o más operaciones se dice que se le ha dotado de una estructura algebraica. Un conjunto no estructurado se denomina *amorfo.*

Como se desprende de lo anterior, las operaciones aritméticas son expresión abstracta de las operaciones de la naturaleza y de aquí sus aplicaciones prácticas.

4. Propiedades de las operaciones. — 1.° Un elemento e en A se dice *neutro* para una operación o ley de composición interna $*$ definida en A si

$$\forall\, a \in A \qquad \text{se tiene} \qquad e * a = a * e = a$$

EJEMPLOS: El 0 en la suma, el 1 en la multiplicación y en una figura plana el giro de 2π alrededor de un punto en su plano, en el conjunto de giros concéntricos.

En general, indicaremos una operación con un signo convenido, así $*$ utilizado antes, el $\square$, etc., colocado entre dos elementos.

2.° Una operación interna en A es *conmutativa* si para todo par de elementos se tiene:

$$\forall\, (a,\ b) \in A \Longrightarrow a * b = b * a$$

EJEMPLOS: La adición y multiplicación de números es conmutativa, no lo es el producto vectorial de vectores, ni el producto de rotaciones no concéntricas en el espacio.

3.° Una operación interna en A es *asociativa* si

$$\forall\, (a,\ b,\ c) \in A \Longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

que significa que el compuesto de a y b, compuesto nuevamente con c, resulta lo mismo que componiendo a con el compuesto de b y c, y este valor es por definición, el resultado de operar con tres elementos simultáneamente.

EJEMPLOS: La adición y multiplicación de números racionales son asociativas.

4.° *Cuando una operación* A *es conmutativa y asociativa, la operación con varios elementos es independiente del orden.*

Sea $m = a * b * c * d * e$, el resultado de componer cinco elementos:

a) Se pueden permutar dos elementos consecutivos. En efecto, se pueden permutar c y d, aplicando convenientemente las propiedades antes definidas y lo convenido al definir la operación con más de dos elementos, tendremos

$$m = a * b * c * d * e = \{[(a * b) * c] * d\} * e$$

y según la definión dada de la propiedad conmutativa, podremos poner la d en primer lugar dentro de las llaves y lo mismo c dentro del corchete, así

$$m = \{d * [c * (a * b)]\} * e = \{d * c * (a * b)\} * e$$

hemos podido escribir el último miembro porque dentro de la llave podemos quitar el corchete. De la misma manera es fácil ver lo que sigue

$$m = \{(d * c) * (a * b)\} * e = \{(a * b) * (d * c)\} * e = \{(a * b) * d * c\} * e$$

Y finalmente, la definición dada para operar con más de dos elementos, nos permite poner

$$m = a * b * d * c * e$$

y por lo tanto

$$m = a * b * c * d * e = a * b * d * c * e$$

b) Se pueden escribir los elementos en un orden cualquiera, mediante permutaciones sucesivas de dos elementos consecutivos.

5.° De una operación $*$ interna en A con elemento neutro e, se dice que un elemento $a \in A$ admite un elemento simétrico $a' \in A$, si:

$$a * a' = a' * a = e$$

EJEMPLOS: En el conjunto Z, a y $-a$, respecto a la suma, y en el conjunto Q, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ respecto al producto.

6.° Dadas las operaciones internas $*$ y $\square$, la primera es *distributiva* respecto a la segunda en A, si

$$a * (b \square c) = (a * b) \square (a * c) \quad \text{y} \quad (b \square c) * a = (b * a) \square (c * a)$$

EJEMPLOS: $a(b+c) = ab + ac$ o bien $(b+c)a = ba + ca$

$$\forall (a, b, c) \in Z$$

7.° Dada la operación $*$, un elemento a es regular con respecto a esta operación si

$$a * x = a * y \Longrightarrow x = y$$

Se dice que se simplifica por a.
Los números son regulares respecto a la adición y multiplicación (excepto el 0), pero no el producto escalar de vectores.

5. Estructuras algebraicas. — Un conjunto A se dice que ha sido dotado o posee una estructura algebraica si en él se han definido una o varias operaciones internas.

Su estudio cobra mucha importancia en la actualidad, pues todos los conjuntos que tengan una misma estructura gozan de las mismas propiedades, que se

derivan de las leyes formales de las operaciones definidoras de la estructura, lo que utiliza el Álgebra para hacer generalizaciones de una fecundidad insospechada.

Nosotros estudiaremos dos clases de estructuras, según el número de operaciones que establezcamos en el conjunto:

a) Con una operación: *Semigrupo, Grupo.*
b) Con dos operaciones: *Semianillo, Anillo, Cuerpo.*

6. Semigrupo y semianillo. — *Un conjunto* S *posee la estructura de semigrupo cuando en él se ha definido una operación interna* $*$ *asociativa,* es decir:

a) $\forall (a, b) \in S \Longrightarrow \exists\, a * b = c \in S$

b) $\forall (a, b, c) \in S \Longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$

$\exists$ es un cuantificador que se lee: *existe uno al menos,* o *existe al menos un elemento.*

El semigrupo se denomina con *elemento neutro* si $*$ lo posee y si $*$ es conmutativa, *S* se llama *semigrupo conmutativo.*

Por ejemplo, el conjunto *N* de números naturales es semigrupo conmutativo sin elemento neutro respecto de la suma, mientras que el mismo conjunto es semigrupo conmutativo con elemento unidad o neutro respecto del producto.

Un conjunto L *posee la estructura de semianillo cuando en él se han definido dos operaciones internas* $*$ *y* $\square$ *con las siguientes propiedades:*

a) L *es semigrupo conmutativo respecto de* $*$.
b) $\square$ *es asociativa y distributiva respecto de* $*$.

Es decir, que

a) $\forall (a, b) \in L \Longrightarrow \exists\, a * b = c \in L$
b) $\forall (a, b, c) \in L \Longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$
c) $\forall (a, b) \in L \Longrightarrow a * b = b * a$
d) $\forall (a, b) \in L \Longrightarrow \exists\, a \square b = c \in L$
e) $\forall (a, b, c) \in L \Longrightarrow a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$
f) $\forall (a, b, c) \in L \Longrightarrow (a * b) \square c = (a \square c) * (b \square c)$

Si $\square$ tiene elemento neutro el semianillo se dice con *elemento neutro,* y si es conmutativo, *L* es *abeliano.*

Las operaciones $*$ y $\square$ suelen llamarse *suma* y *producto.*

Por ejemplo, el conjunto *N* respecto a las operaciones ya conocidas de suma y producto es un semianillo conmutativo y con unidad o elemento neutro respecto a la segunda.

7. **Número natural. Número cardinal.** — En Aritmética se ha creado un conjunto de entes abstractos, llamado *conjunto de los números naturales,* definidos por las siguientes propiedades:

a) Todo número natural o elemento del conjunto, tiene un sucesor y solamente uno.

b) Todo elemento o número natural tiene un solo antecesor, excepto el elemento denominado uno, al que no antecede otro.

c) No existen elementos iguales o repetidos.

Evidentemente, el conjunto de números naturales N, así definido, es pues ilimitado y ordenado.

Además, siempre será posible separar ordenadamente a partir del primer elemento, un subconjunto a de N, que se puede coordinar con un conjunto A de número finito de elementos. A esto se denomina contar el conjunto A. Al hacerlo ordenadamente, resultará que al último elemento del conjunto A le corresponderá un número natural, que llamaremos número *cardinal del conjunto* A.

Es evidente que a dos conjuntos coordinables A y B, les corresponden el mismo número cardinal, y entonces se dice que son equivalentes o pertenecen a la misma clase. Esta coordinación o *contaje* no varía, aun cuando variemos el modo u orden de contar. Es decir, que de cualquier modo que contemos un conjunto, obtendremos el mismo número cardinal para él.

Un conjunto carente de elementos se dice que es vacío, se le representa por el símbolo $\varnothing$ y se le hace corresponder el número cardinal 0. Una vez establecido el concepto de número cardinal, podremos agrupar los conjuntos en clases. Todos los conjuntos de la misma clase serán coordinables entre sí y con el mismo subconjunto de N, y, por consiguiente, el mismo número cardinal los representará. Es evidente que cada conjunto pertenece a una sola clase y que existen infinitas clases.

Además, es fácil ver que entre dos conjuntos finitos A y B, puede existir una de estas relaciones

$$A \supset B \qquad A \barwedge B \qquad A \subset B$$

según que A y B pertenezcan o no a la misma clase.

Cuando esto sucede, a las relaciones anteriores hacemos corresponder respectivamente una de las siguientes con sus números cardinales:

$$a > b \qquad a = b \qquad a < b$$

La primera y la última relación constituyen una desigualdad, y la segunda, una igualdad. En todas ellas, a es el primer miembro, y b el segundo.

Para designar los números naturales se emplean símbolos orales y escritos, y sistemas de reglas que permiten representar todos los números con pocos de esos signos, tanto orales como escritos. Al conjunto de estos sistemas de reglas o símbolos se le llama sistema de numeración.

Número cardinal es un ente abstracto expresado por un símbolo oral y otro escrito, que sirve para representar una de las clases de conjuntos coordinables entre sí, distinguiéndolos de los no coordinables con ellos.

2. Las operaciones aritméticas con números naturales

1. Operaciones aritméticas. — Aún cuando la Aritmética es una ciencia abstracta, así como sus operaciones, no obstante, éstas tienen relación con el mundo real. Las operaciones aritméticas son las mismas operaciones que se hacen con los conjuntos de entes reales, realizadas con el conjunto de los números, por lo que no son sino la expresión abstracta de las operaciones que se verifican en la naturaleza y de aquí se derivan sus aplicaciones prácticas.

Los números naturales son entes abstractos, que según se ha dicho, representan a los conjuntos, de aquí que toda operación de juntar, dividir, etc. conjuntos A y B de elementos naturales, casi siempre da origen a otro conjunto C, al cual corresponderá otra operación con los dos números representantes de los conjuntos, que llamaremos operación *numérica* o *aritmética.*

Entre los conjuntos se pueden definir las operaciones elementales más importantes, que son la *agregación* y la *composición,* a las que corresponden la *adición* y la *multiplicación* numéricas. Sus inversas son: *sustracción* y *división.*

Al conjunto de operaciones elementales con sus inversas, que dan origen a otro número distinto de los dados, o datos, se llama *algoritmo.*

2. Suma de números naturales. — Cuando dos conjuntos no tienen ningún elemento común se dice que no se cortan, expresándose así:

$$A \cap B = \varnothing$$

Por el contrario, para expresar que los conjuntos A y B se cortan en el conjunto C, o bien que los elementos de C son comunes a A y B, se escribe:

$$A \cap B = C$$

En cambio, indicaremos que D y E pertenecen a la misma clase poniendo

$$D \overline{\wedge} E \qquad \text{o bien} \qquad D = E$$

y entonces se dice que ambos conjuntos son equivalentes. Los números cardinales d y e representantes de las respectivas clases a que pertenecen D y E, se dice que son iguales y se expresa:

$$d = e$$

Dados los conjuntos A *y* B, *tales que* $A \cap B = \varnothing$, *llamamos suma o agregado de* A *y* B *a otro conjunto* S, *formado por todos y sólo los elementos de* A *y* B. Se indica

$$A \cup B \overline{\wedge} S \Longrightarrow a + b = s \qquad [2\text{-a}]$$

siendo *a, b* y *s* los cardinales correspondientes a los conjuntos. El símbolo $\cup$ significa unión o agregación.

De aquí que: *Suma de dos números naturales* a *y* b *es el cardinal de un conjunto, que se obtiene agregando los* b *elementos de uno de los conjuntos a los* a *del otro.*

Se representa

$$a + b = s$$

La operación de sumar se llama *adición,* cada uno de los números dados, *sumandos,* y el resultado, *suma.*

Llamamos suma de varios números *a, b, c,* ... naturales, al resultado de sumar los dos primeros y al número resultante sumarle el tercero, y así sucesivamente.

3. Leyes fundamentales de la suma. — PROFIEDAD UNIFORME: *La suma de dos números naturales es única.* En efecto, sean a y a' los cardinales de los conjuntos A y A', pertenecientes a la misma clase y b y b' los de B y B', también de una misma clase. Se tiene

$$A \overline{\wedge} A' \quad \text{y} \quad B \overline{\wedge} B' \Longrightarrow A \cup B \overline{\wedge} A' \cup B'$$

pues cada elemento del primer miembro pertenece sólo a un conjunto —al B, por ejemplo—, y se le puede hacer corresponder con su homólogo de B'.

Esto supone, al reemplazar los conjuntos por sus números, que si

$$a = a' \quad \text{y} \quad b = b' \Longrightarrow a + b = a' + b' \qquad [2\text{-b}]$$

es decir, que *sumando m. a. m. dos igualdades de números naturales se obtiene otra igualdad.*

Ahora bien, si sumamos m. a. m. la igualdad [2-b] con $c = c'$, se tiene

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

y siguiendo de esta manera se demuestra que la propiedad es cierta para cualquier número de igualdades.

PROPIEDAD CONMUTATIVA. Sean los conjuntos A y B, tales que $A \cap B = \varnothing$ y a y b sus cardinales, se puede poner

$$A \cup B \overline{\wedge} B \cup A \Longrightarrow a + b = b + a \qquad [2\text{-c}]$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA. Es una consecuencia de la propiedad conmutativa y de la definición de suma. En efecto, se pueden asociar los dos, tres, etc. primeros sumandos por la definición de suma y como se puede llevar al primer lugar cualquier sumando, se les podrá asociar y volverlos al lugar que convenga.

Existencia de elemento neutro o cero. — Si A es un conjunto y a su cardinal, siendo $\varnothing$ el conjunto vacío cuyo cardinal es O, se tiene

$$A \cup \varnothing \overline{\wedge} A \Longrightarrow a + O = a$$

Puesto que la suma de números naturales es conmutativa para dos sumandos y asociativa, tiene un resultado independiente del orden de los sumandos cualesquiera sea el número de éstos, según 1-4-4.°

4. Ley de monotonía. — Si a, b y c son tres números naturales y

$$a = b + c \qquad [2\text{-d}]$$

entonces se dice que a es mayor que b o bien que b es menor que a, indicándose respectivamente por

$$a > b \quad \text{o} \quad b < a$$

Estas expresiones son dos desigualdades de distinto sentido. Ahora bien, si sumamos m. a. m. [2-d] con $d = d$, resulta

$$a + d = b + c + d = (b+d) + c \Longrightarrow a + d > b + d \qquad [2\text{-e}]$$

Por otra parte, si se tiene

$$a > b \quad \text{y} \quad c > d$$

podemos escribir

$$a + c > b + c \quad \text{y} \quad b + c > b + d \Longrightarrow a + c > b + d$$

Por consiguiente, *si se suman m. a. m. una desigualdad con una igualdad, o dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.*

5. Producto cartesiano de números naturales: sus leyes. — Si tenemos dos conjuntos α y β cuyos elementos respectivos son

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \quad \text{y} \quad \beta = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

al conjunto que resulta de componer cada elemento de α con cada elemento de β llamaremos conjunto compuesto o producto, que indicaremos por

$$\pi = \alpha\beta$$

y leeremos: π es el conjunto compuesto de α y de β.

Así, el conjunto será:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1, & a_2b_1, & a_3b_1, & a_4b_1 \\ a_1b_2, & a_2b_2, & a_3b_2, & a_4b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1b_5, & a_2b_5, & a_3b_5, & a_4b_5 \end{array}$$

Observando el cuadro se ve inmediatamente cómo se puede obtener el producto.

Pasando de los conjuntos a los números, *llamaremos producto de dos números* a *y* b, *al número de pares que se pueden formar, componiendo cada elemento de un conjunto de* a *objetos, con cada elemento de otro conjunto de* b *objetos.*

A los números *a* y *b* se les llama *factores:* el primero *multiplicando,* y el segundo *multiplicador,* y el producto lo indicamos así:

$$p = a \times b \quad \text{o} \quad p = ab$$

y se dice que *p* es múltiplo de *a* y de *b.*

El producto de varios factores es el resultado de multiplicar los dos primeros y este producto por el tercero, y así sucesivamente hasta el último.

De la definición dada de producto, se deduce que:

$$A \cdot \varnothing = \varnothing \qquad a \cdot O = O$$

ya que no es posible componer el conjunto *A* con otro carente de elementos.

Leyes del producto de números naturales. — PROPIEDADA UNIFORME: si tenemos los conjuntos

$$A = \{a_i\}, \quad A' = \{a'\}, \qquad B = \{b_j\} \quad \text{y} \quad B' = \{b'_j\}$$

de modo que

$$\left.\begin{array}{l} A \overline{\wedge} A' \\ B \overline{\wedge} B' \end{array}\right\} \text{siendo} \quad \begin{array}{l} a_n \longrightarrow a'_n \\ b_r \longrightarrow b'_r \end{array} \Longrightarrow A \cdot B \overline{\wedge} A' \cdot B', \text{ pues basta que } a_n b_r \longrightarrow a'_n b'_r$$

Por consiguiente, con los respectivos números naturales se tiene

$$\left.\begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array}\right\} \Longrightarrow ab = a'b'$$

Luego *el producto de dos números naturales es único,* o bien, *multiplicando m. a. m. dos igualdades de números naturales, resulta otra igualdad.* Es muy fácil ver que la propiedad es válida cuando son más de dos igualdades.

PROPIEDAD CONMUTATIVA: Sean $A = \{a_i\}$ y $B = \{b_j\}$ dos conjuntos y *a* y *b* sus cardinales. Se puede poner:

$$A \cdot B \overline{\wedge} B \cdot A, \text{ pues es suficiente que } a_n b_r \longrightarrow b_r a_n \Longrightarrow ab = ba$$

Demostrada esta propiedad para dos factores, es fácil extenderla para cualquiera de ellos, siguiendo un razonamiento del todo semejante al empleado en la suma.

EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO: Sean $A = \{a_i\}$ y $B = \{u\}$, y a y 1 sus cardinales. Es evidente que

$$AB \overline{\wedge} A \Longrightarrow a \times 1 = a$$

Al número 1 se le llama *módulo de la multiplicación.*

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: *Para multiplicar una suma por un número, se puede multiplicar cada sumando por el número y sumar los productos, sin que varíe el resultado.*

Pues si $A = \{a_i\}$, $B = \{b_j\}$ y $C = \{c_k\}$ siendo a, b y c sus respectivos cardinales, se tiene:

$$A \cdot (B \cup C) \overline{\wedge} (A \cdot B) \cup (A \cdot C), \quad \text{pues} \quad \begin{cases} a_n b_r \longrightarrow a_n b_r \\ a_n c_s \longrightarrow a_n c_s \end{cases}$$

lo cual es posible siempre. De aquí se deduce que

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$$

que demuestra lo que se deseaba.

6. Potencias y monomios.—El producto $abcd... n$, cuando $a=b=c=d=...=n$, se representa por a^n, siendo n el número de factores, que llamamos exponente, a la base, y al conjunto a^n, potencia enésima de a.

Por la propiedad conmutativa del producto, y por la definición de potencia, se puede poner:

$$a^n b^n c^n d^n = (aaaa \ldots a)\,(bbbb \ldots b)\,(cccc \ldots)\,(dddd \ldots d) =$$
$$= (abcd)\,(abcd) \ldots (abcd) = (abcd)^n$$

Esto quiere decir que para multiplicar varias potencias del mismo exponente, se puede hacer de la siguiente manera:

Se multiplican las bases, y el producto se eleva al exponente dado.

Cuando se multiplican varios números a, b, c, d, repitiéndose todos o algunos, a los que se repiten se les puede agrupar, y resulta una expresión de la forma:

$$a^n b^m c^p d^q$$

en la que algunos de los exponentes pueden ser nulos, o iguales a la unidad.

A la citada expresión se le llama *monomio* o *expresión monomia.*

Al factor numérico, si lo lleva, se llama *coeficiente,* y a la suma total de los exponentes de las letras, *grado del monomio.*

Valor numérico de un monomio es el que se obtiene al sustituir sus letras por números.

7. La multiplicación, caso particular de la suma. — Al hacer la composición de los conjuntos α y β, como se hizo en el número 5, se puede observar que el cuadro o conjunto $\alpha\beta$ se compone de cinco filas de cuatro objetos cada una, o de

cuatro columnas de cinco objetos cada una de ellas; por tanto, el número de elementos del conjunto producto será:

$$4 \cdot 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 + 5 + 5 + 5$$

esto es, que el producto *ab,* es igual a la suma de *a* sumandos iguales a *b,* o a *b* sumandos iguales a *a.*

Esto nos permite probar la ley de monotonía de la multiplicación, considerada como un caso de la suma. En efecto, si

$$a > b \qquad \text{será} \qquad an > bn$$

pues la segunda desigualdad no es más que la suma de *n* desigualdades del mismo sentido.

8. Diferencia de números naturales: sus propiedades. — *Llamamos diferencia de dos números naturales* a *y* b, *denominados respectivamente minuendo y sustraendo, a otro número* d, *que es necesario sumar al sustraendo para obtener el minuendo.* Es decir, que,

$$a = b + d$$

Esto se suele poner así

$$a - b = d$$

que se lee: *a* menos *b* igual a *d.*

El número *d* se llama diferencia de *a* y *b*; *a* es el minuendo y *b* el sustraendo, y la operación se llama *sustracción.*

Propiedades de las diferencias. — PROPIEDAD UNIFORME: Si $d' \neq d$, será

$$b + d' \neq b + d \qquad \text{y} \qquad a = b + d$$

por tanto

$$a \neq b + d'$$

Esto es, *la diferencia de dos números es única.*

Otras propiedades:

Teniendo en cuenta que las expresiones siguientes

$$d = a - b, \qquad a = b + d, \qquad a - d = b \qquad [2\text{-f}]$$

son idénticas, por ser la expresión de la diferencia, tendremos:

1.° Puesto que

$$a + 0 = a \Longrightarrow a - a = 0$$

2.° $d = a - b \Longrightarrow a = b + d \Longrightarrow (a+m) = (b+m) + d \Longrightarrow$

$$(a+m) - (b+m) = d = a - b$$

3.° De $a = a'$ y $a > c \Longrightarrow d = a - c = a' - c \Longrightarrow a - c = a' - c$

4.° $\left.\begin{matrix} a > b \\ b > c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a = b + d \Longrightarrow a - c = b + d - c \Longrightarrow a - c > b - c$

5.° $a > b$ y $c < d$ siendo $b > d$, resulta

$$\left.\begin{matrix} a = b + m \\ d = c + n \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a + d = b + m + n + c \Longrightarrow (a+d) - (b+m+n) = c$$

Según 2.°, $a - (b+m+n-d) = c$

Según [2-f], $a - c = b + m + n - d \Longrightarrow a - c > b - d$

9. Polinomios. — Cuando varios números aparecen en forma de sumas o diferencias de productos o monomios, se dice que forman un *polinomio.* EJEMPLO: es un trinomio

$$3a^2b - 7ab^3c^4 + 2ac^4$$

Grado de un polinomio es el mayor grado de sus monomios. Un polinomio cuyos monomios sean todos del mismo grado, es homogéneo.

Los polinomios de primer grado se llaman *lineales.*

El polinomio $5xy^3 - 2x^2y^2 + 4x^4 - 3y^4$ es homogéneo, y el $6x + 7y$ es lineal y homogéneo.

Cálculo de polinomios: 1.° Restar de un número natural una suma

$$a - (b+c) = a - b - c$$

En efecto,

$$d = a - (b+c) \Longrightarrow a = d + (b+c) = d + b + c = (d+c) + b$$

Por consiguiente,

$$a - b = (d+c) \Longrightarrow (a-b) - c = d \Longrightarrow a - b - c = d \Longrightarrow$$
$$a - b - c = a - (b+c)$$

2.° Sumar un número natural con una diferencia $a + (b-c) = a + b - c$.

Sea $d = a + (b-c)$ si $b > c$ se puede poner

$$d + c = a + (b-c) + c = a + b \Longrightarrow d = (a+b) - c = a + b - c$$

Por consiguiente, $a + (b-c) = a + b - c$

Sean los polinomios

$$P_1 = a + b + c, \quad P_2 = a + b - c, \quad P_3 = a - b - c, \quad P_4 = a - b + c$$

Pero

$$P_1 = a + b + c = s - s_0,$$

siendo $s = a + b + c$ y $s_0 = 0$

$$P_2 = a + b - c = s - s_1,$$

siendo $s = a + b$ y $s_1 = c$

$$P_3 = a - b - c = a - (b+c) = s - s_1,$$

siendo $s = a$ y $s_1 = b + c$ según 1.°

$$P_4 = a - b + c = (a-b) + c = c + (a-b) = c + a - b = s - s_1,$$

siendo $s = c + a$ y $s_1 = b$ según 2.°

Por consiguiente:

Todo polinomio de tres términos es igual a una diferencia de la suma de los términos positivos, menos la suma de los términos negativos, siempre que esta diferencia sea posible.

4.° Si el polinomio tiene más términos es fácil darse cuenta que se pueden agrupar del modo dicho los tres primeros, y esa agrupación así obtenida y el tercer término constituyen uno de los casos anteriores, por lo que se les podrá agrupar del mismo modo. Continuando así sé que cualquiera que sea el número de términos de un polinomio, se podrán agrupar éstos en una suma que contenga todos los términos que lleven signo positivo, menos otra suma con los términos precedidos del signo negativo.

10. Cociente de números naturales: sus propiedades. — *Cociente de dos números,* a *dividendo y* b *divisor, es otro número que multiplicado por el segundo nos da el primero,* es decir, que si

$$a = b \cdot c$$

c es el cociente de a por b.

Este cociente existe tan sólo cuando a contiene un número exacto de veces a b.

Se expresa:

$$a : b = c \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} = c$$

PROPIEDADES: I. *Si multiplicamos dividendo y divisor por* $k \neq 0$, *el cociente no varía,* es decir, que será:

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$$

Si n es el primer cociente, será $a = bn$ y, por tanto,

$$ak = (bn)\,k = (bk)\,n,$$

lo cual supone que n es también el cociente del segundo miembro.

II. Si $p_1 = nq_1, \quad p_2 = nq_2, \quad p_3 = nq_3$

podemos poner, sumando miembro a miembro:

$$p_1 + p_2 + p_3 = n(q_1+q_2+q_3)$$

por lo cual:

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3}{n} = q_1 + q_2 + q_3 = \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n} + \frac{p_3}{n}$$

Esto lo expresamos diciendo que, *para dividir una suma de varios sumandos por un número, se puede dividir por dicho número cada uno de los sumandos y sumar los resultados.*

III. Si $p_1 = nq$, multiplicando los dos miembros por p_2, podemos poner:

$$p_1p_2 = nqp_2 = n(qp_2)$$

lo cual equivale a:

$$\frac{p_1p_2}{n} = qp_2 = \frac{p_1}{n}p_2$$

Es decir, que *para dividir un producto por un número, es suficiente con dividir uno cualquiera de los factores.*

11. División inexacta entre números naturales. — Dados tres números D, d y q, es evidente que entre ellos puede existir la siguiente relación, supuesto d no nulo:

$$dq \leqq D < d(q+1)$$

ya que D es finito.

La operación que tiene por objeto hallar q, conociendo D y d, se llama *división inexacta*, siendo q el cociente entero por defecto, D el dividendo y d el divisor.

De la limitación anterior resulta:

$$D - dq < d(q+1) - dq = d$$

La diferencia $D - dq$ se llama resto por defecto, y es menor que el divisor.

Puedo poner:

$$D - dq = r$$

y por lo mismo:

$$D = dq + r$$

Por semejanza, se llama resto por exceso a:

$$d(q+1) - D = r'$$

Es inmediato que:

$$r + r' = D - dq + d(q+1) - D = d$$

Por tanto, dividir D *por* d, *es hallar dos números,* q *cociente y* r *resto, que satisfagan las relaciones* $D = dq + r$ *y* $d > r$. Estos números existen siempre, por lo dicho al principio, y son únicos; luego, la división inexacta es uniforme.

Por la propiedad distributiva de la multiplicación, de

$$D = dq + r$$

deducimos

$$Dn = (dn)q + rn$$

Propiedad que dice: *Si al dividendo y al divisor de una división inexacta se les multiplica por un número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado por dicho número.*

12. Semianillo N de los números naturales. — Los números naturales forman un semianillo. En efecto, en *N* se definen dos operaciones internas, la suma respecto a la cual es semigrupo conmutativo y la multiplicación, que es asociativa y distributiva respecto a la suma.

Es decir, que posee las siguientes propiedades y se definen las operaciones:

Adición, operación interna	*para*	$(5, 6) \in N \Longrightarrow \exists\, 5+6 = 11 \in N$
Asociativa	*para*	$(7, 9, 4) \in N \Longrightarrow (7+9)+4=7+(9+4)=20$
Conmutativa	*para*	$(7, 9) \in N \Longrightarrow 7+9=9+7=16$
Multiplicación, oper. interna	*para*	$(4, 8) \in N \Longrightarrow \exists\, 4 \times 8 = 32 \in N$
Asociativa	*para*	$(9, 7, 5) \in N \Longrightarrow (9\times7)\times5=9\times(7\times5)=315$
Distributiva	*para*	$(8, 4, 2) \in N \Longrightarrow (8+4)\times2=8\times2+4\times2=24$

y como la multiplicación tiene elemento neutro 1 *y es conmutativa, el semianillo* N *es abeliano.*

3. Sistemas de numeración

1. Objeto de la numeración. — Hemos visto que el conjunto de números naturales es infinito, por tanto, sería imposible expresar todos los números con signos distintos, sea oral, sea gráficamente. Aún más, en la práctica la imposibilidad se presentaría en cuanto tuviéramos que representar muchos números. Para obviar este inconveniente, desde antiguo, se han inventado los *sistemas de numeración, que son unas reglas y convenios que permiten expresar todos los números mediante pocas palabras y signos.* Los más conocidos son el sistema decimal y el romano, aún cuando no han dejado de existir otros.

El primero tiene su origen en la India, y está fundado en el número diez, número de dedos de ambas manos, que se llama *base.*

El romano descompone cada número en suma o diferencia de otros varios, representados por los símbolos siguientes, y cuyos valores insertamos debajo:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

y estos mismos signos con una o más rayitas encima.

Escribiremos los siguientes números, a modo de ejemplo:

1963 = MCMLXIII, 47 = XLVII, 875 = DCCCLXXV, 919 = CMXIX

84595 = $\overline{\text{LXXXIV}}$DXCV, 5476846 = $\overline{\overline{\text{V}}\text{CDLXXVI}}$DCCCXLVI

2. Teorema fundamental. — *En* N *dado un número como base* n > 1, *todo número* A, *se puede descomponer de un modo único en la siguiente forma:*

$$A = a + bn + cn^2 + dn^2 + \dots + hn^k,$$

siendo a, b, c, d, ... h, *números menores que* n.

En efecto, efectuadas las sucesivas divisiones, que se indican a continuación, tendremos:

$$\begin{array}{llllll}
A & \underline{|n} & & & & \\
a & q_1 & \underline{|n} & & & \\
 & b & q_2 & \underline{|n} & & \\
 & & c & q_3 & \underline{|n} & \\
 & & & d & q_4 & \\
 & & & & \cdot & \\
 & & & & \cdot & \\
 & & & & q_{k-1} & \underline{|n} \\
 & & & & g & q_k
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
A = q_1 n + a \\
q_1 = q_2 n + b \\
q_2 = q_3 n + c \\
q_3 = q_4 n + d \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
q_{k-1} = q_k n + g
\end{array}
\qquad [3\text{-a}]$$

Al ser el divisor mayor que la unidad, los diversos cocientes irán disminuyendo y llegará un momento que el cociente q_k será menor que el divisor y no se podrá continuar las divisiones.

Teniendo en cuenta [3-a], podemos poner:

$$A = a + q_1 n = a + n(b + q_2 n) = a + bn + q_2 n^2$$
$$A = a + bn + n^2(q_3 n + c) = a + bn + cn^2 + q_3 n^3 = \ldots$$

Y en definitiva

$$A = a + bn + cn^2 + dn^3 + \ldots + q_k n^k$$

y haciendo $q_k = h$, queda:

$$A = a + bn + cn^2 + dn^3 + \ldots hn^k$$

Supongamos que por otro procedimiento obtenemos los números

$$a', \quad b', \quad c', \quad d', \quad \ldots \quad h'$$

todos menores que n, diferentes de los anteriores y tales que podemos poner:

$$A = a' + (b' + c'n + d'n^2 + \ldots + h'n^{k-1})\, n$$

Esto nos dice que a' es el resto de dividir A por n, y como a también lo es, deberemos concluir que necesariamente por la propiedad uniforme de la división

$$a = a'$$

Ahora bien, el cociente será precisamente

$$q_1 = b' + c'n + d'n^2 + \ldots + h'n^{k-1} = b' + (c' + d'n + \ldots + h'n^{k-2})\, n$$

por lo que b' es el resto de dividir q_1 por n, luego $b' = b$.

Siguiendo así probaríamos que

$$c = c', \quad d = d', \quad \ldots \quad h = h'$$

3. Expresión de un número en el sistema de base cualquiera B. — *Dado un número cualquiera y la base de numeración elegida, de modo que* $B > 1$, *siempre es posible descomponerlo en forma única, como se hizo en el número anterior, con lo que tendremos:*

$$A = a + Bb + cB^2 + dB^3 + \ldots + hB^n$$

en el que $a, b, c, \ldots h$, son números inferiores a B, que llamaremos *cifras.*

Para abreviar se conviene en expresarlo de la manera siguiente:

$$A = h \ldots dcba$$

que no debe confundirse con el producto de las cifras.

Se acostumbra a expresar la base del sistema en que está escrito el número, poniéndola como subíndice a la derecha del mismo número. Así:

$$h \ldots dcba_{(B}$$

Se han de tener en cuenta los siguientes principios:

1.° *Siempre la base del sistema se escribe* 10 *y cada uno de los números inferiores a la base, o cifras, con un signo especial.*

2.° *Cada cifra tiene dos valores, uno según su forma y otro por el lugar que ocupa, de modo que la primera de la derecha expresa unidades simples, la segunda, unidades de segundo orden, la tercera de tercer orden, etc.*

3.° *Cada unidad de un orden equivale a* B *unidades del orden inferior.* Ejemplo:

$$478\,aOb_{(12}$$

es un número escrito en el sistema de base *12, b* vale once unidades simples, *a* diez unidades de tercer orden, y así sucesivamente.

Para expresar la carencia de unidades de cualquier orden se emplea el *O*. El número anterior carece de unidades de segundo orden.

4. Propiedades de todo sistema de numeración. — Si la base es B:

1.° *Los números* B, B^2, B^3, ..., se escriben 10, 100, 1 000.

2.° El producto de $N = h \ldots cba = hB^n + \ldots + cB^2 + bB + a$, por B^k, se escribe con las mismas cifras que N, pero seguidas de k ceros, o sea,

$$NB^k = h \ldots cba\,000 \overset{k}{\ldots} 00$$

pues

$$NB^k = hB^{n+k} \ldots + cB^{2+k} + bB^{1+k} + aB^k + OB^{k-1} + \ldots + OB + O$$

5. Sistema binario. — Después del sistema de numeración decimal, indudablemente el que en estos tiempos ha adquirido más importancia, ha sido el sistema *diádico* o *binario,* o de base *2,* pues además de tener interés para algunas cuestiones matemáticas se ha adoptado casi universalmente en las modernas máquinas calculadoras, llamadas *Digitales* por emplear dígitos en lugar de intensidades de magnitudes físicas (potenciales, rotaciones, etc.), que emplean las que se conocen con el nombre de *Analógicas.* Ciñéndonos a las digitales, necesitan ante todo, para representar los números, echar mano de un dispositivo de tantos estados físicos como números dígitos vaya a emplear.

Esto quiere decir que si emplea el sistema decimal, necesita para cada orden de unidades, diez símbolos o estados, que pueden consistir en diez canales eléctricos, o diez impulsos eléctricos, que se diferencian o en su duración o en el número de impulsos parciales sucesivos, etc.

Ahora bien, el sistema binario no necesita más que dos cifras o dígitos, el *0* y el *1*. La mayoría de los fenómenos físicos apropiados para ser utilizados por las calculadoras precisamente, presentan dos estados físicos muy sencillos, así un relé tiene dos posiciones, cerrado o abierto, una válvula electrónica conduce o no, por un circuito pasa o no pasa corriente eléctrica, etc. Ésta ha sido la causa determinante para que se haya elegido este sistema de numeración para las calculadoras modernas.

En ellas el paso de un impulso eléctrico por un circuito representa el *1* y el no paso representa el *0*.

En el sistema binario los primeros números naturales son:

Decimal:	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
Binario:	1	10	11	100	101	110	111	1 000	1 001 ...

6. Paso de un sistema de numeración a otro.

1.° *Pasar del sistema de base* B *al decimal.*

Sea el número $A = h \ldots cba_{(B}$

Sabemos que equivale a:

$$A = hB^n + \ldots + cB^2 + bB + a$$

Calculando el valor de esta suma en el sistema decimal, resolveremos el problema.

Obsérvese que el segundo miembro es un polinomio, al que podremos aplicar la regla de Ruffini para hallar su valor numérico.

EJEMPLO: Pasar al sistema decimal el número $7b2a806_{(12}$, lo dispondremos de la manera siguiente:

	7	11	2	10	8	0	6
12)		84	1140	13704	164568	1974912	23698944
		95	1142	13714	164576	1974912	23698950

Será pues, $7b2a806_{(12} = 23698950$.

2.° *Expresar en base* B *un número escrito en el sistema decimal.* — Siguiendo el método indicado para el teorema fundamental, se divide el número por la base, el cociente obtenido se vuelve a dividir por la misma, continuando las divisiones hasta obtener un cociente menor que la base. Este último cociente es la primera cifra, y las siguientes serán los restos tomados en orden inverso al que se han obtenido.

EJEMPLO: Escribir en base 8 el número 78746.

78746	8				
67	9843	8			
34	18	1230	8		
26	24	43	153	8	
2	03	30	73	19	8
	3	6	1	3	2

De aquí que $78746 = 231632_{(8}$

3.° Para pasar de un sistema de base *B* a otro de base *C*, se pasa primero del sistema de base *B* al decimal, y de éste al de base *C*.

7. Adición en un sistema de base cualquiera. — Para sumar varios números escritos en una base cualquiera, los pondremos unos debajo de otros, de modo que se correspondan en columna las unidades del mismo orden. Se comienza por hallar la suma de las cifras de las unidades simples, de cuya suma se escribe tan sólo la cifra de las unidades simples, sumando el número que queda a su izquierda con la segunda columna, y se hace lo mismo con ésta y con las demás columnas. Esta operación se facilita disponiendo de una tabla de sumar.

EJEMPLO: Sumar los distintos números del sistema de base 12.

Obsérvese que la cifra *a* representa al *10* y *b* al *11*. La segunda columna suma *23* que, escrito en base *12*, es *1 b*. Escribo debajo la cifra *b* y sumo el *1* a la columna siguiente.

$$\begin{array}{r} 7435_{(12} \\ 31a0_{(12} \\ 6ba4_{(12} \\ \hline 155b9_{(12} \end{array}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	10
2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	10	11
3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	10	11	12
4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	10	11	12	13
5	6	7	8	9	*a*	*b*	10	11	12	13	14
6	7	8	9	*a*	*b*	10	11	12	13	14	15
7	8	9	*a*	*b*	10	11	12	13	14	15	16
8	9	*a*	*b*	10	11	12	13	14	15	16	17
9	*a*	*b*	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	*b*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1*a*
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1*a*	1*b*

8. Sustracción en un sistema de base cualquiera. — Se aplica la siguiente regla que es muy sencilla de probar: Se resta cada cifra del sustraendo de su correspondiente del minuendo, comenzando por la de orden inferior, sirviéndose de la tabla de sumar. Cuando una cifra del minuendo es menor que su correspondiente del

sustraendo, se le suma a ésta la base y a la siguiente del sustraendo una unidad, así la diferencia no varía, como se prueba a continuación. En efecto, sean los números

$$N = dcba \quad = dB^3 + cB^2 + bB + a \qquad \text{y}$$
$$M = d'c'b'a' = d'B^3 + c'B^2 + b'B + a'$$

Su diferencia es

$$N - M = dB^3 + cB^2 + bB + a - (d'B^3 + c'B^2 + b'B + a') =$$
$$= dB^3 + cB^2 + (b+B)\,B + a - [d'B^3 + (c'+1)\,B^2 + b'B + a']$$

EJEMPLO: Restar $7\,824_{(9} - 6\,475_{(9}$. Dispondremos la operación

$$\begin{array}{r} 7\,8\,2\,4_{(9} \\ 6\,4\,7\,5_{(9} \\ \hline 1\,3\,3\,8_{(9} \end{array}$$

Al 4 de la primera columna se le ha añadido 9 y al 7 se le suma 1, etc.

9. Multiplicación. — Estudiaremos los siguientes casos:

1.° *Multiplicar dos números de una cifra.* Se hace ayudándose de la tabla de multiplicar.

2.° *Multiplicar un número de varias cifras por otro de una.* Se multiplica cada cifra del segundo por el primero, escribiendo de cada producto sólo las unidades simples y el número suprimido de la izquierda se suma al producto siguiente, excepto el último producto de la izquierda, que se escribe íntegro.

EJEMPLO: Multiplicar en el sistema de base 9 los números

7	8	5	0	$4_{(9}$	
				$\times 7$	
49	56	35	0	28	Productos en el sistema decimal.
54	62	38	0	31	Productos en el sistema de base 9.
61	5	8	3	1	Resultado en base 9.

Obsérvese que el 3, unidades de segundo orden, se ha sumado con el 0. El 3, unidades de tercer orden, se suma con el 2, y el 6, unidades de cuarto orden, se suma con el 4, que hace 10, escribo 1 y llevo 1 para sumar con el 5.

Con la tabla de multiplicar a la vista, se hubiera podido realizar directamente la operación.

3.° *Producto de dos números cualesquiera.* Sea

$$N = a + bB + cB^2 + dB^3$$

que deseamos multiplicar por el número M, ambos en el sistema de base B. Tendremos, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$N \cdot M = (a + bB + cB^2 + dB^3)\,M = aM + bMB + cMB^2 + dMB^3$$

De aquí se deduce la regla: *Para multiplicar dos números cualesquiera, se multiplica el multiplicando por cada cifra del multiplicador, teniendo en cuenta de colocar el primer producto de manera que sus unidades coincidan con las del mismo orden, el segundo de modo que sus unidades coincidan con las del segundo orden del anterior, y así sucesivamente. Luego se suman los productos parciales así colocados.*

EJEMPLO:

$$
\begin{array}{r}
358702_{(9} \\
\quad 473_{(9} \\
\hline
1188306 \\
2757415 \\
1558108 \\
\hline
185684356_{(9}
\end{array}
$$

10. División entera. — Pongamos un ejemplo: sea la división de los números 60 453 : 43, escritos en base 7. Una vez escrita la tabla de multiplicar en base siete, se dispone de la siguiente manera:

	60453 | 43	
1.er Producto	43	$1243_{(7}$
1.er Resto	144	
2.° Producto	116	
2.° Resto	255	
3.er Producto	235	
3.er Resto	203	
4.° Producto	162	
	$11_{(7}$	

	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Es fácil darse cuenta de la marcha de las operaciones y comprobar el resultado.

4. Variaciones y permutaciones

1. Combinatoria. — La Aritmética, al estudiar los números, o la numeración, prescinde en cada conjunto de la naturaleza y orden de los elementos, considerando a todos ellos enteramente equivalentes.

En cambio, la Combinatoria, prescinde de la naturaleza de los objetos que forman los conjuntos, pero no del orden en que estos objetos están colocados; esto supone que no considera a todos los objetos equivalentes, sino diferentes, por lo que a cada objeto lo designa con un signo distinto, generalmente una letra, o la misma letra pero con distinto subíndice. Es decir, que para la Aritmética, al contar los alumnos de un Colegio que han sido premiados, todos esos alumnos son iguales, y dirá que son treinta y siete los alumnos premiados. La Combinatoria no se contenta con ese número, sino que nos dirá qué alumno ha recibido el primero, cuál el segundo premio, etc. y además, de cuántas maneras podían haberse repartido esos premios.

Los problemas fundamentales que presenta la Combinatoria son tres: Variaciones, Combinaciones y Permutaciones.

2. Variaciones. — *Dados* m *objetos distintos* $a_1, a_2, \ldots a_m$, *llamaremos variación de orden* n *de estos* m *objetos, a todo grupo formado con* n *de esos* m *objetos, siendo todos diferentes, considerando dos grupos distintos cuando difieran en algún objeto o en el orden en que están colocados, o en ambas cosas.*

Estas variaciones se llaman *monarias, binarias, ternarias, ..., enearias,* según consten de 1, 2, 3, ..., *n* objetos. Así, si disponemos de las letras *abcd,* serán variaciones ternarias diferentes:

abc, bac, adb, abd, etc.

Designaremos el *número* de variaciones *enearias* con *m* objetos, con el siguiente símbolo: V_m^n, que se leerá: *número de variaciones de orden* n *con* m *objetos.*

3. Formación de variaciones. — Las variaciones de orden *n* con *m* objetos, se podrán formar de muchas maneras, pero vamos a demostrar que una de ellas, acaso la más sencilla, es la siguiente:

Se obtendrán todas las variaciones de orden *n* con *m* objetos, formando antes las variaciones de orden $n - 1$ con esos *m* objetos, y luego, añadiendo al final de cada una de éstas, uno a uno, los $m - (n-1) = m - n + 1$ objetos que de ella no forman parte.

EJEMPLO: Queremos formar las variaciones ternarias con los cuatro elementos 1, 2, 3, 4.

Supuesto que las variaciones binarias con estos objetos son

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43,

formaremos las de orden 3, añadiendo a la primera el 3 y 4, que de ella no forman parte, así: 123, 124. A la siguiente, el 2 y el 4, así: 132, 134, etc.

Demostración: Decimos que así se forman todas, y nada más, las variaciones de orden n con m objetos. En efecto: 1.° Todos los grupos así formados contienen n objetos distintos. 2.° Todos son diferentes, pues o difieren en el último elemento o en los $n-1$ primeros si proceden de distinta variación de orden $n-1$. Y 3.°, así se obtienen todas las variaciones de orden n con m elementos, por ejemplo la $a_r a_b a_s \ldots a_l a_q$, pues si suprimo el último elemento a_q, me queda la variación de orden $n-1$, $a_r a_b a_s \ldots a_l$, que le habrá llegado el turno para que le hayamos añadido a_q y, por tanto, será una de las obtenidas. Lo que decimos de la variación propuesta, podemos decirlo de cada una. Luego así formaremos todas, y nada más, las variaciones de orden n con los m objetos.

4. Número de variaciones enearias con m objetos. — Lo demostrado en el número anterior nos permite poner: $V_m^n = V_m^{n-1}(m-n+1)$.

De aquí se deducen fácilmente las siguientes igualdades:

$$V_m^1 = m; \qquad V_m^2 = V_m^1(m-1) = m(m-1)$$

$$V_m^3 = V_m^2(m-2) = m(m-1)(m-2)$$

Y si esta ley es cierta hasta el orden $n-1$, se tiene:

$$V_m^{n-1} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)$$

Será, por tanto,

$$V_m^n = V_m^{n-1}(m-n+1) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)$$

Es decir, que *el número de variaciones de orden* n *con* m *objetos o elementos, es el producto de* n *factores, el primero de los cuales es* m, *y los demás van disminuyendo de unidad en unidad.*

EJEMPLO: Formar las variaciones de orden 3 con 1, 2, 3, 4.

Lo haremos de la siguiente manera, según [4-3]:

V_4^1 son 1, 2, 3, 4.

V_4^2 son 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 43.

V_4^3 son 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

5. Variaciones con repetición. — En las variaciones antes consideradas no se repetía ningún elemento en ningún grupo, por eso se les llama variaciones ordinarias o *sin repetición.*

Si suponemos que cada elemento puede repetirse cualquier número de veces en cada grupo, tendremos las *variaciones con repetición.*

Llamamos, pues, variaciones con repetición de orden n *con* m *elementos, a cada uno de los grupos que se pueden formar con esos* m *elementos, conteniendo cada grupo* n *de esos elementos, pudiendo estar alguno de ellos repetido de* 0 *a* n *veces y considerando dos grupos distintos si se diferencian en algún elemento, o en el orden en que están colocados.*

Su número se indica: VR^{n}_{m}.

Se forman, evidentemente, las variaciones con repetición de orden n con m elementos, formando primero las de orden $n-1$ con esos m elementos, y añadiendo a cada una de éstas, uno a uno, los m elementos u objetos. Así sean los elementos u objetos: *a, b, c, d.*

En total, $VR^{1}_{n} = 4$

VR^{1}_{4} son: *a, b, c, d.*
VR^{2}_{4} son: *aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd.*
VR^{3}_{4} son: *aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, ...*

Su número, evidentemente, será:

$$VR^{1}_{m} = m, \qquad VR^{2}_{m} = m^2, \qquad VR^{3}_{m} = m^3, \quad \ldots \quad VR^{n}_{m} = m^n$$

según se desprende de la regla de su formación.

6. Permutaciones de m elementos u objetos sin repetición. Su número. — *Llamamos permutaciones con* m *objetos sin repetir ninguno, a cada uno de los grupos que se pueden formar tomando cada vez esos* m *objetos y considerando dos grupos distintos, si se diferencian en el orden de colocación.*

Son permutaciones las agrupaciones que se pueden formar con las letras de *mar* sin repetir ninguna:

mar, mra, rma, amr, arm, ram.

Las variaciones de orden m con m elementos no son sino las permutaciones con m objetos. Luego:

$$P_m = V^{m}_{m} = m(m-1)(m-2)\ldots 2 \cdot 1 = m!$$

que se lee: *Número de permutaciones con* m *objetos, igual a factorial de* m.

7. Formación de las permutaciones. — Puesto que las permutaciones son un caso particular de las variaciones se podrían formar lo mismo que éstas; no obstante, se consigue más rapidez con la siguiente regla: *Para formar las permuta-*

ciones sin repetición con m *objetos, se forman primero las permutaciones con* m − 1 *objetos y luego a cada una de éstas se le coloca el objeto emésimo en todos los lugares posibles.* Así, para formar las permutaciones con *a, b, c, d,* seguiremos el siguiente proceso:

P_1 son *a*

P_2 son: *ab, ba*

P_3 son: *abc, acb, cab, cba, bca, bac.*

P_4 con: *abcd, acbd, cabd, bacd, bcad, cbad, abdc, acdb, cadb, badc, bcda, cbda, adbc, adcb, cdab, bdac, cdca, cdba, dabc, dacb, dcab, dbac, dbca, dcba.*

Como se ve por el ejemplo, se comienza por formar las permutaciones con dos elementos, y con éstos se forman las de tres, y así se sigue hasta que se llegue a formar las de *m* elementos.

La demostración de esta regla es sencilla. Basta considerar que los grupos así formados son permutaciones con *m* elementos, todos distintos, y además, se escriben todos, pues queda escrita una cualquiera $a_3a_1a_r \dots a_na_p$, ya que si le suprimimos el elemento a_m, nos queda una permutación de $m - 1$ elementos, que le habrá llegado su turno para que le hayamos colocado el elemento a_m en el lugar en que lo llevaba la permutación citada. Lo dicho para ésta se puede aplicar para cada una de las demás; luego están formadas todas, y nada más, las permutaciones con esos *m* elementos.

8. Permutaciones con repetición. — Sean los *m* elementos:

$$a_1a_2a_3a_4 \dots a_{m-h}\overbrace{bbbb \dots b}^{h}$$

entre los cuales está la *b* repetida *h* veces.

Supongamos que hemos podido escribir todas las permutaciones, repitiendo en cada una de ellas *h* veces la *b* y que su número sea

$$P_m^h$$

Si en cada una numeramos las *bes* de la siguiente manera:

$$b_1b_2b_3 \dots b_h$$

y luego, conservando los lugares relativos, se colocan de todos los modos posibles las citadas *bes* de cada permutación, evidentemente, obtendremos P_h grupos por cada permutación y su número total vendrá expresado por

$$P_m^h \times P_h$$

Pero los grupos que así hemos obtenido son todas las permutaciones ordinarias con *m* elementos. Efectivamente, constan todas de *m* elementos distintos; todos esos grupos son diferentes, pues se diferencian en el orden relativo de las

as entre sí, o con respecto a las *bes,* o bien en el orden de las *bes.* Además, así quedan escritas todas las permutaciones ordinarias con esos *m* elementos, pues dada una cualquiera, siempre se podrá considerar que proviene de una de repetición al dotar de subíndice a las *bes* y colocar éstas de todos los modos posibles.

Por tanto, podremos poner:

$$P_m^h \times P_h = P_m; \implies P_m^h = \frac{P_m}{P_h}$$

Es fácil comprobar que además de repetirse *h* veces el elemento *b,* podrá haber otros que se repitan *i, j,* ..., veces. Será entonces su número

$$P_m^{h+i+j} = \frac{P_m}{P_h P_i P_j}$$

con la condición de que $h + i + j + ... \leq m$.

Del razonamiento anterior se deduce una forma para escribir las permutaciones con repetición, que será: *formar primero las permutaciones ordinarias con los* m *elementos, y luego quitar los subíndices a las letras que han de repetirse.*

5. Combinaciones. Propiedades de los números combinatorios

1. Combinaciones. — *Llamaremos combinaciones sin repetición de orden* n *con* m *objetos o elementos, a los diferentes grupos que se pueden formar tomando cada vez* n *de esos* m *elementos y considerando dos grupos diferentes si difieren al menos en un elemento.* Así, son diferentes combinaciones de orden 3 con las cinco letras *a, b, c, d, e,* los siguientes grupos:

abc, bad, cde

Obsérvese que en las combinaciones así definidas no interviene el orden de colocación de los elementos; por tanto, la combinación *dcb* será la misma que *bcd.* Haremos uso de esta propiedad para considerar las combinaciones siempre con sus elementos en orden natural, esto nos facilitará el estudio.

$$C_m^n \quad \text{o} \quad C_{m,\,n}$$

que se lee: *Combinaciones de orden* n *con* m *elementos.*

2. Formación de las combinaciones. — Hay muchas maneras de formar todas las combinaciones de orden n con m elementos. Una de las más sencillas y sistemáticas es la siguiente:

Se forman todas las combinaciones de orden $n - 1$ con esos m elementos, y luego se añaden uno a uno, a cada una de ellas, los elementos que siguen al último que lleva la combinación.

Así, para formar las combinaciones de orden 3 con los 5 elementos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, formaremos primero las combinaciones monarias, luego las binarias y, por último, las ternarias con esos elementos, es decir,

C_5^1 son: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

C_5^2 son: a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1a_5, a_2a_3, a_2a_4, a_2a_5, a_3a_4, a_3a_5, a_4a_5.

C_5^3 son: $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_5$, $a_1a_3a_4$, $a_1a_3a_5$, $a_1a_4a_5$, $a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_5$, $a_2a_4a_5$, $a_3a_4a_5$.

Queda justificada esta regla teniendo en cuenta que así las combinaciones obtenidas son de n elementos, todas distintas, pues se diferencian en los $n - 1$ primeros elementos o en el último; y, por fin, que así se obtienen todas, pues una cualquiera, por ejemplo, $a_r \ldots a_p a_s a_3$, se hallará en el grupo así definido. Efectivamente, esa combinación, si no está ordenada, colocamos sus elementos en orden natural, y suprimiendo el último elemento, nos queda una de las combinaciones de orden $n - 1$, a la cual le habrá llegado su turno de añadirle el elemento que le hemos quitado, con lo que obtenemos la combinación en cuestión.

3. Número de combinaciones. — TEOREMA: *El número de combinaciones de orden* n *con* m *elementos, multiplicado por el número de permutaciones con* n *elementos, es igual al número de variaciones de orden* n *con* m *elementos.*

En efecto: Si tengo escritas todas las variaciones de orden n con m elementos, se observará que habrá $P_n = n!$ variaciones que están formadas por los mismos elementos que una cualquiera de ellas, pues téngase en cuenta que las variaciones, además de diferenciarse en algún elemento, se pueden diferenciar tan sólo en el orden de colocación de los mismos. Lo mismo que decimos de esta variación podemos decir de todas y cada una de las demás, que se diferencian de ella en algún elemento. Esto nos prueba que de todas esas variacions habrá:

$$V_m^n : P_n$$

que se diferencian al menos en un elemento.

Pero esas variaciones de n elementos, que se diferencian unas de otras al menos en un elemento, son combinaciones de orden n con m elementos. Y son todas, pues las variaciones enésimas con m elementos son todos los grupos que se pueden formar tomando cada vez n elementos, y que se diferencian en el orden o en algún elemento; si prescindimos de los que se diferencian en el orden, nos quedan todos los que se diferencian en algún elemento. Luego

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} \quad \text{o lo que es igual:} \quad C_m^n \times P_n = V_m^n$$

Su número será

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \frac{m}{1} \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{(m-2)}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{m-n+1}{n}$$

lo que nos permite decir que *el número* C_m^n *es igual a una fracción cuyo denominador es* n! *y su numerador es un producto de* n *factores, el primero de los cuales es* m *y los demás van disminuyendo de unidad en unidad,* así:

$$C_7^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

4. Combinaciones con repetición. — Las combinaciones consideradas antes se llaman sin repetición, pues cada elemento no se puede repetir dentro de la misma combinación.

Existen otras combinaciones en las que cada objeto o elemento se puede repetir dentro de la misma combinación, y por eso se llaman combinaciones con repetición de orden n con m objetos. Según esto, *serán los grupos que se pueden formar con esos* m *objetos tomando cada vez* n *de ellos, repetidos o no, y siendo dos grupos distintos con tal que se diferencien en algún objeto.* Así, con *a, b, c, d,* puedo formar las siguientes combinaciones con repetición de tercer orden: *abc, aab, aaa, dcc, ...*

Indicaremos su número con el siguiente símbolo CR_m^n, que leeremos: *combinaciones con repetición de orden* n *con* m *elementos.*

Se obtienen de la misma forma que las ordinarias, es decir, añadiendo a cada una del orden anterior, los elementos que siguen al último que lleve, incluido éste. Así, con los objetos *a, b, c,* se forma:

aa, ab, ac, bb, bc, cc. Combinaciones binarias con repetición.

aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc. Combinaciones ternarias con repetición.

Para encontrar la fórmula que nos dé su número, seguiremos el siguiente razonamiento: Supuestas escritas todas las combinaciones enearias de m elementos con repetición, en cada combinación incrementaremos el subíndice de cada elemento en tantas unidades como elementos le preceden y cambiaremos las *as* por *ces;* así, $a_1a_3a_3a_5a_6a_6$ se transforma en $c_1c_4c_5c_8c_{10}c_{11}$. Lograremos así que los elementos tengan un subíndice distinto y creciente en cada combinación. Por otra parte, cada subíndice de las *as,* se puede repetir hasta n veces y entre ellos el último, por lo que las combinaciones enearias de los m elementos $a_1a_2a_3 \ldots a_m$, repetidos o no, se transforman en combinaciones ordinarias de orden n formadas por las letras $c_1c_2c_3 \ldots c_{m+n-1}$, pues el último elemento de cada combinación, incrementa su subíndice en $n-1$, y por tanto, el mayor subíndice resultará de incrementar el de a_m.

Todas las combinaciones de las *ces* así obtenidas, son distintas, pues para ser iguales deberían serlo las de las *as,* de las que proceden. Además, una combinación de las *ces* determina una combinación con repetición de las *as,* sin más que rebajar los índices sucesivos en 0, 1, 2, 3, ... $n-1$ unidades.

Resulta pues,

$$CR_m^n = C_{m+n-1}^n = \frac{(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)\ldots[m+n-1-(n-1)]}{n!}$$

O bien

$$CR_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!} \qquad [5\text{-a}]$$

5. Números combinatorios: sus propiedades. — Al número de combinaciones ordinarias se le suele llamar *número combinatorio* y entonces se le indica con el símbolo

$$\binom{m}{n}$$

que se lee m sobre n, siendo m el índice superior y n el índice inferior. Será, pues,

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{n!} \qquad [5\text{-b}]$$

De aquí se deduce que m y n han de ser enteros y positivos y además, $m \geq n$.

No tendrá significado el símbolo $\binom{m}{0}$, pero le daremos el valor de 1, siempre que se presente.

Propiedades:

1.ª $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} =$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad [5\text{-c}]$$

2.ª $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ y $\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)![m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$

Luego

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \qquad [5\text{-d}]$$

3.ª Según la 1.ª propiedad, se puede poner:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} =$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \cdot \frac{m-n}{n+1}$$

Sacando factor y operando,

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n!(m-n)!}\left[1 + \frac{m-n}{n+1}\right] =$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!}\,\frac{m+1}{n+1} = \frac{(m+1)!}{(n+1)![m+1-(n+1)]!}$$

lo cual nos dice que:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1} \qquad [5\text{-e}]$$

que es lo que deseábamos demostrar.

4.ª Según la propiedad anterior, puedo poner:

$$\begin{aligned}
\binom{m}{n} &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \\
\binom{m-1}{n} &= \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n} \\
\binom{m-2}{n} &= \binom{m-3}{n-1} + \binom{m-3}{n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\binom{n+1}{n} &= \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\
\binom{n}{n} &= \binom{n-1}{n-1}
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro y suprimiendo términos semejantes, tenemos:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} \quad [5\text{-f}]$$

Y aplicando a esta igualdad la propiedad segunda

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m-1}{m-n} + \binom{m-2}{m-n-1} + \binom{m-3}{m-n-2} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{0}$$

y llamando $m - n = K$, será $m - 1 - (n-1) = K$; $m - 2 - (n-1) = K - 1$, y así sucesivamente. Nos queda de esta otra forma:

$$\binom{m}{K} = \binom{m-1}{K} + \binom{m-2}{K-1} + \binom{m-3}{K-2} + \ldots + \binom{m-K}{1} + \binom{m-K}{0} \quad [5\text{-g}]$$

6. Número de términos de un polinomio completo. — 1.° Que el polinomio tenga m variables, $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ y sea homogéneo de grado n. Es evidente que cada término tendrá n variables como factores, tomados entre $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ de los cuales algunos podrán ser repetidos. Se podrán escribir tantos términos como combinaciones con repetición de orden n se puedan formar con las m variables, es decir,

$$C^n_{m+n-1} = \binom{m+n-1}{n} \text{ términos}$$

EJEMPLO:

Sea el polinomio $P(x, y, z, v)$ de tercer grado con cuatro variables, tendrá

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20 \text{ términos, que serán:}$$

$$a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4x^2v + a_5xy^2 + a_6xz^2 + a_7xv^2 + a_8xyz^2 + a_9xzv + a_{10}xyv + a_{11}yzv + a_{12}y^3 + a_{13}y^2z + a_{14}y^2v + a_{15}z^3 + a_{16}z^2v + a_{17}z^2y + a_{18}v^3 + a_{19}v^2y + a_{20}v^2z$$

2.° Si el polinomio es completo, mas no homogéneo, pero de grado n y con m variables, $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, se le puede convertir en homogéneo introduciendo una nueva variable $x_0 = 1$, con sólo multiplicar cada término por la potencia conveniente de x_0, para completar el grado n. Hecho esto, estamos en el caso anterior; basta considerar que el número de variables es de n en cada término y $m + 1$ en total.

El número de términos será, pues,

$$\binom{m+n}{n} = C^n_{m+n}$$

6. Conceptos de grupo y anillo

1. Definición de Grupo. — *Un conjunto* G *tiene estructura de grupo, cuando posee una operación* $*$ *respecto la cual* G *es semigrupo con unidad y tal que todo elemento tiene un simétrico respecto de* $*$, es decir:

a) $\forall (a, b) \in G \Longrightarrow \exists\, a * b = c \in G$

b) $\forall (a, b, c) \in G \Longrightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$

c) $\exists\, e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$ para $\forall\, a \in G$

d) $\forall\, a \in G \Longrightarrow \exists\, a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$

Si además $*$ es conmutativa, G se llama *grupo conmutativo o abeliano.*

EJEMPLOS:

1.° Los números enteros Z forman un grupo respecto a la suma, siendo O el elemento neutro.

2.° Los números racionales Q lo forman respecto a la suma, pero no respecto al producto, ya que O no posee simétrico respecto a dicha operación.

3.° El conjunto de traslaciones T en el espacio respecto al producto de traslaciones que se define:

$$T(\vec{V}) \cdot T(\vec{V'}) = T(\vec{V} + \vec{V'})$$

pues se tiene:

a) $[T(\vec{V}) \cdot T(\vec{V'})] \cdot T(\vec{V''}) = T(\vec{V}) \cdot [T(\vec{V'}) \cdot T(\vec{V''})]$

b) $T(\vec{O}) \cdot T(\vec{V}) = T(\vec{V})$

c) $T(\vec{V}) \cdot T(-\vec{V}) = T(\vec{O})$

4.° El conjunto de rotaciones R de centro O en el plano, constituyen un grupo *conmutativo* o *abeliano.*

5.° En cambio, N no es grupo, ni respecto a la suma ni a la multiplicación, ya que en ambos casos le falta la simetrización de sus elementos.

Los grupos de estos ejemplos son todos conmutativos. Un ejemplo de grupo no abeliano es el conjunto de giros no concéntricos, como es fácil de ver.

Si la operación que define el grupo se llama *suma* o *producto,* el grupo se llamará *aditivo* o *multiplicativo,* respectivamente.

2. Propiedades del grupo. — 1.° *Regularidad.* Si a, b y $c \in G$, siendo $*$ una operación o ley de composición interna en G y se verifica que

$$b * a = c * a \qquad [6\text{-a}]$$

Tendremos, si a' es el simétrico de a respecto a $*$,

$$(b * a) * a' = (c * a) * a' \Longrightarrow b * (a * a') = c * (a * a') \Longrightarrow b * e = c * e$$

por consiguiente

$$b = c$$

Entonces se *dice que* a $\in$ G *es un elemento regular y también que* [6-a] *se ha simplificado por* a.

EJEMPLO:

$$8 + 5 = (2+6) + 5 \Longrightarrow 8 = 2 + 6$$

2.ª *Dada una operación interna de grupo, existe otra inversa.* En efecto, supongamos que (a, b y x) $\in G$ y se verifica la ecuación en x

$$x * a = b \qquad [6\text{-b}]$$

Si $x = x_0$ es una solución, tendremos que

$$x_0 * a = b$$

Siendo a' el simétrico de a, se podrán escribir las siguientes relaciones:

$$b * a' = (x_0 * a) * a' = x_0 * (a * a') = x_0 * e = x_0$$

Es decir, que si existe una solución x_0 de [6-b], se verifica que

$$x_0 = b * a'$$

y recíprocamente, el valor $b * a'$, satisface a [6-b], pues

$$b = (b * a') * a = b * (a' * a) = b * e = b$$

La operación $b * a' = x_0$, se denomina *inversa* de $x_0 * a = b$.

EJEMPLO: En Z se tiene que a

$$7 + 6 = 13, \quad \text{corresponde} \quad 13 - 6 = 7$$

Obsérvese que si el grupo no es conmutativo, es posible que la operación interna correspondiente, tenga más de una operación inversa.

3.ª *Producto de elementos simétricos en* G. Sea u el simétrico de $a * b$, entonces, si G es conmutativo

$$(a * b) * u = e$$

Pero

$$(a * b) * u = a * (b * u) = e$$

Según el apartado anterior, si a' es el simétrico de a

$$a' * a * b * u = a' * e \Longrightarrow b * u = a'$$

y aplicando nuevamente la operación inversa, resulta

$$u = a' * b'$$

Esto nos autoriza a poner

$$\textit{simétrico de } (a * b) = \textit{simétrico de } a * \textit{simétrico de } b$$

Es decir, que *si operamos con dos elementos simétricos de* G, *obtenemos el simétrico del resultado de operar con esos elementos.*

EJEMPLO: En Q se tiene:

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1 \qquad -\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = -1$$

4.ª *Si el grupo* G *es conmutativo o abeliano no existe más que una operación inversa de la que define el grupo.* En efecto, la operación inversa de $x_0 * a = b$, es según se vio, $b * a' = x_0 = a' * b$, por ser grupo conmutativo. Por otra parte a no tiene más que un simétrico, que es a', por lo tanto, la operación

$$a' * b = b * a' \quad \text{es única}$$

3. Subgrupo. — *Dado un grupo* G, *si* H *es un subconjunto de* G *que respecto a la operación* $*$ *de* G *tiene también estructura de grupo, entonces* H *se llama subgrupo del grupo* G.

EJEMPLOS:

1.° El conjunto Z es un subgrupo aditivo del grupo aditivo Q.

2.° El conjunto de los números pares positivos y negativos, junto con el cero, es un subgrupo conmutativo de Z.

3.° El conjunto $\{-1, +1\}$ es un subgrupo multiplicativo del grupo multiplicativo $Q' = Q - \{0\}$.

El conjunto Q no es grupo multiplicativo, pues le falta el simétrico al cero.

4.° Las traslaciones en el plano forman un subgrupo de las traslaciones en el espacio, que además es abeliano.

Propiedades de los subgrupos: 1) *El elemento neutro del subgrupo* H, *es el mismo que el del grupo* G.

En efecto, sean ε y e los dichos elementos neutros.

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } H \longrightarrow \varepsilon * \varepsilon = \varepsilon \\ \text{En } G \longrightarrow \varepsilon * e = \varepsilon\end{array}\right\} \Longrightarrow \varepsilon * \varepsilon = \varepsilon * e \quad \text{y como es regular} \quad \varepsilon = e$$

2) La condición necesaria y suficiente para que una parte H del grupo G sea un subgrupo, es

a) *Que* H *tenga la misma ley interna* $*$ *de grupo que* G.

b) Si $\left\{\begin{matrix} a \in H \\ a' = \text{simétrico de } a \text{ en } G \end{matrix}\right\}$ es $a' \in H$

En efecto, estas condiciones son necesarias, pues si faltan, H no es subgrupo de G.

Y si la cumple, se tiene que $*$ es una operación interna en H. Al ser asociativa en G, lo sería en H. Un elemento cualquiera a, tiene su simétrico en H. Por fin, $a * a' = e \in H$, pues así lo exige la ley interna. Por consiguiente, queda demostrado.

4. Anillo y subanillo. — *Un conjunto* A *tiene estructura de anillo cuando posee dos operaciones* $*$, $\square$ *respecto de las cuales* A *es un semianillo y tal que* A *sea grupo respecto* $*$, es decir:

a) $\forall (a, b) \in A \Longrightarrow \exists\, a * b = c \in A$

b) $\forall (a, b, c) \in A \Longrightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$

c) $\forall (a, b) \in A \Longrightarrow a * b = b * a$

d) $\exists\, e \in A$ tal que $a * e = e * a$ si $a \in A$

e) $\forall\, a \in A \Longrightarrow \exists\, a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$

f) $\forall (a, b) \in A \Longrightarrow \exists\, a \square b = c \in A$

g) $\forall (a, b, c) \in A \Longrightarrow a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$

h) $a \square (b * c) = (a \square b) * (a \square c)$; $\qquad (b * c) \square a = (b \square a) * (c \square a)$.

Si $\square$ posee elemento unidad, A se llama *anillo con unidad* y A es *abeliano* si es conmutativa $\square$.

EJEMPLOS:

1.° Los números enteros Z, forman anillo conmutativo con unidad respecto a la suma y producto.

2.° Lo mismo decimos de las *clases residuales* respecto a un módulo cualquiera.

Dado un anillo A *respecto a las operaciones* $*$ *y* $\square$ *si* P *es un subconjunto de* A *que respecto a* $*$ *y* $\square$ *también tiene estructura de anillo, entonces* P *es llamado subanillo de* A.

Por ejemplo, el conjunto de enteros múltiplos de 5 es un subanillo del anillo Z. Nótese que en este caso el subanillo ya no tiene elemento unidad.

5. Propiedades de los anillos. — 1.° *Producto por cero.* Si a y b son elementos de un anillo matemático, cuyo elemento neutro respecto a la suma es 0, se tiene, para el producto,

$$a \cdot b = a \cdot (b+0) = a \cdot b + a \cdot 0 \Longrightarrow a \cdot 0 = 0$$

y lo mismo

$$b \cdot a = (b+0) \cdot a = b \cdot a + 0 \cdot a \Longrightarrow 0 \cdot a = 0$$

En un anillo el producto de dos elementos es nulo si uno de los factores lo es.

El recíproco no es cierto siempre, pues existen anillo en los que sin ser a ni b nulos, se tiene:

$$b \cdot a = 0$$

En este caso se dice que a *y* b *son divisores de cero.*

Por consiguiente, cuando a y b no son divisores de cero y $a \cdot b = 0$, necesariamente

$$a = 0, \quad \text{o} \quad b = 0 \quad \text{o bien} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b = 0$$

2.° *Regla de los signos en la multiplicación.* Si a y b son elementos de un anillo y b' es el simétrico de b respecto a la suma, se verifica $b + b' = 0$ y además

$a \cdot b + a \cdot b' = a \cdot (b+b') = a \cdot 0 = 0 \Longrightarrow a \cdot b$ tiene por simétrico a $a \cdot b'$

Por consiguiente

$$a \cdot (-b) = -ab$$
$$(-a) \cdot b = b(-a) = -ba$$
$$(-a) \cdot (-b) = -a(-b) = a \cdot b$$

que son las mismas que se emplean en Z.

3.ª *La propiedad distributiva se aplica a las diferencias en los anillos.* En efecto, sean a, b y c los elementos de un anillo. Se tiene:

$$(a-b) \cdot c = [a+(-b)] \cdot c = a \cdot c + (-b) \cdot c = a \cdot c + (-b \cdot c) = a \cdot c - b \cdot c$$

La última igualdad es la aplicación de (6-2-2.°).

7. El número entero

1. Definiciones. — En la segunda lección hemos estudiado los números naturales, considerándolos como representaciones abstractas de conjuntos. Con ellos hemos podido definir las operaciones de adición y multiplicación, y lo hemos podido hacer sin ninguna salvedad, pero al querer definir la sustracción, hemos tenido que poner la condición, para que fuese posible, que el minuendo fuera mayor que el sustraendo.

Con objeto de hacer posible esta operación en todos los casos, se extiende el campo de los números naturales, introduciendo el signo, con lo que tenemos los *números enteros relativos,* o simplemente *enteros.*

Dado el conjunto de números naturales, más el cero

$$N' = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n,\ \ldots\}$$

formemos otro conjunto $Z = N' \times N'$, con todas las parejas posibles $(a;\ b)$, siendo

$$\forall\ (a \text{ y } b) \in N'$$

así, por ejemplo: $(4;\ 7)$, $(123;\ 120)$, $(3;\ 18)$, ...

de modo que consideremos dos parejas $(a;\ b)$ y $(a';\ b')$ equivalentes si satisfacen a la relación

$$a + b' = a' + b$$

Esta equivalencia se anotará de la manera siguiente:

$$(a;\ b) = (a';\ b')$$

Todas las parejas así formadas se denominan *conjunto de números enteros relativos,* o simplemente *enteros.*

2. Consecuencias. — 1.ª La definición dada de equivalencia satisface a las propiedades:

Reflexiva: pues $(a;\ b) = (a;\ b)$

Simétrica: pues si $(a;\ b) = (a';\ b') \Longrightarrow (a';\ b') = (a;\ b)$

ya que si $a + b' = b + a' \Longrightarrow a' + b = b' + a$

Transitiva: pues de $(a;\ b) = (a';\ b')$ y $(a';\ b') = (a'';\ b'') \Longrightarrow (a;\ b) = a'';\ b'')$

pues de $\begin{cases} a + b' = b + a' \\ a' + b'' = b' + a'' \end{cases} \Longrightarrow (a+b') + (a'+b'') = (b+a') + (b'+a'') \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow a + b'' = b + a''$$

2.° Los elementos $(a;\ b)$ y $(a+n;\ b+n)$
son $(a;\ b) = (a+n;\ b+n)$

pues tratándose de números naturales siempre se verifica que

$$a + b + n = b + a + n$$

3.° La consideración de los números iguales

$$(4;\ 0) = (6;\ 2) = (8;\ 4) = (9;\ 5) = \ldots$$
$$(0;\ 6) = (1;\ 7) = (5;\ 11) = (7;\ 13) = \ldots$$

nos permite afirmar que todas las parejas posibles, se pueden agrupar, como se indica, con lo que cada grupo así formado, constituiría una *clase de números enteros,* y cada clase define un número entero por uno cualquiera de sus elementos o parejas.

4.° Las primeras parejas, $(4;\ 0)$, $(0;\ 6)$ y en general $(a;\ 0)$, $(0;\ a)$ y $(0;\ 0)$, se denominan *formas canónicas de los números enteros.*

Si el número entero es representado por $(a;\ 0)$, o bien $(0,\ a)$, se dice que a es su *módulo,* o *valor absoluto,* que *es el número natural que resulta al prescindir de todo signo.* Si $\alpha = (a;\ b)$, indicaremos su módulo de la siguiente manera $|\ \alpha\ |$

5.° Por $(a+b;\ b)=(a;\ 0)$, designamos un número positivo, por $(b;\ a+b)=(0;\ a)$ uno negativo y por $(a;\ a) = (0;\ 0)$ un número nulo.

Para abreviar, pondremos $(a;\ 0) = +a$ y $(0;\ a) = -a$, formando los signos parte del número, por lo que *los números enteros así escritos constan de dos partes, el módulo y el signo.* Este signo se dice que es *predicativo,* para diferenciarlo de los signos *operativos.*

3. Adición. — *Llamamos suma de dos números enteros representados por* $(a;\ b)$ *y* $(a';\ b')$, *a otro número entero representado por* $(a+a';\ b+b')$.

La operación se indica así

$$(a;\ b) + (a';\ b') = (a+a';\ b+b')$$

EJEMPLO:

$$(5;\ 2) + (8;\ 3) = (13;\ 5) = (8;\ 0) \quad \text{y} \quad (7;\ 10) + (6;\ 15) = (13;\ 25) = (0;\ 12)$$

Operando con las respectivas formas canónicas, resulta

$$(2;\ 0) + (6;\ 0) = (8;\ 0) \quad \text{y} \quad (0;\ 3) + (0;\ 9) = (0;\ 12)$$

lo cual indica que el resultado es independiente de los representantes elegidos. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, podremos enunciar las siguientes reglas:

$$(a;\ 0) + (b;\ 0) = (a+b;\ 0)$$
$$(0;\ c) + (0;\ d) = (0;\ c+d)$$

La suma de dos números enteros de igual signo es otro número entero con el mismo signo y cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

En la práctica se acostumbra a escribir

$$a + b = a + b \qquad \text{y} \qquad -c - d = -(c+d)$$

prescindiendo del signo más, ante el primer sumando, y delante del signo menos.

Por lo mismo, siendo $a > b$ y $c > d$

$$(a; 0) + (0; b) = (a; b) = (a-b; 0) = a - b$$
$$(0; c) + (d; 0) = (d; c) = (0; c-d) = -(c-d)$$

Por consiguiente: *la suma de dos números enteros de signos contrarios, es otro número entero cuyo signo es el del de mayor valor absoluto y cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de los sumandos.*

Por definición, *hallaremos la suma de varios números, sumando los dos primeros y el resultado con el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al último.*

4. Leyes formales de la adición. — Veamos que la suma así definida satisface a las leyes formales.

Uniforme:

$$\text{Si} \begin{cases} (a; b) = (a'; b') \\ (c; d) = (c'; d') \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b' = b + a' \\ c + d' = d + c' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a + b' + c + d' = b + a' + d + c' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a+c; b+d) = (a'+c'; b'+d')$$

Por consiguiente,

$$(a; b) + (c; d) = (a'; b') + (c'; d')$$

que nos dice que *el resultado de la suma es independiente de los representantes que elijamos en la clase respectiva de cada sumando.*

Conmutativa: Sean los números $(a; b)$ y $(c; d)$, podemos poner

$$(a; b) + (c; d) = (a+c; b+d) = (c+a; d+b) = (c; d) + (a; b)$$

ya que $c + a = a + c$ y $b + d = d + b$, por ser números naturales.

Con las formas canónicas será, si $(0; a) = \alpha$ y $(b; 0) = \beta$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{o bien} \quad 5 + (-7) = -7 + 5$$

Asociativa: Sean los números $(a; b)$, $(c; d)$ y $(p; q)$, se tiene

$$[(a; b)+(c; d)] + (p; q) = (a+c; b+d) + (p; q) = (a+c+p; b+d+q)$$
$$(a; b) + [(c; d)+(p; q)] = (a; b) + (c+p; d+q) = (a+c+p; b+d+q)$$

Es decir, $[(a; b)+(c; d)] + (p; q) = (a; b) + [(c; d)+(p; q)]$

y representados por sus formas canónicas α, β y γ se tiene

$$(\alpha+\beta) + \gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$$

Existencia de elemento neutro o nulo: $e = (0; 0)$. En efecto,

$$(a; b) + (0; 0) = (0; 0) + (a; b) = (a; b)$$

o bien

$$\alpha + e = e + \alpha = \alpha$$

Según 1-4-4.°, la suma de varios números es conmutativa.

5. Sustracción. — *Llamamos números enteros opuestos a dos números de igual valor absoluto, pero de distinto signo.* Su suma es cero. En efecto:

$$(a; 0) + (0; a) = (a; a) = (0; 0) \quad \text{o bien} \quad a + (-a) = 0$$

Así $$7 + (-7) = 0$$

Denominamos diferencia de dos números enteros, m, *minuendo y* s, *sustraendo, a otro número entero,* d, *que sumado con el sustraendo nos da el minuendo,* es decir, que satisfacen a la relación

$$s + d = m, \quad \text{que también se expresa} \quad m - s = d$$

Sumemos a los dos miembros de la primera igualdad el número opuesto del sustraendo, $-s$, y se tiene

$$m + (-s) = m - s = s + d + (-s) = s - s + d = d$$

que nos permite decir que *para hallar la diferencia de dos números, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.*

6. Leyes de monotonía de la adición y sustracción. — *En* Z *decimos que un número* a *es mayor que cero cuando es positivo,* se escribe

$$a > 0$$

y se dice que a *es mayor que* b, *si la diferencia* a − b *es positiva* y se indica

$$a > b \quad \text{o bien} \quad a - b = n \in N \quad \text{o} \quad b < a$$

La primera y última expresiones se llaman desigualdades y en este caso son de sentido contrario. Los números a y b son los miembros.

1.° Si $\forall\ (a \text{ y } b) \in Z$ y $a > b$, se tiene, $a - b > 0$; y su opuesto, según, 7-3, será

$$-(a-b) = -a + b < 0 \Longrightarrow -a - (-b) < 0 \Longrightarrow -a < -b$$

Por consiguiente, *si a los dos miembros de una desigualdad de números enteros se les cambia de signo, resulta otra desigualdad de signo contrario.*

2.° Si $\forall\ (a \text{ y } b) \in Z$ y $a > b \Longrightarrow a - b = a'$ positivo $\Longrightarrow a = b + a'$, según 7-5.

Pero $\left.\begin{matrix} a = b + a' \\ c = c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a + c = b + a' + c = (b+c) + a'$

y según 6-5, $\qquad a + c > b + c$

Si a los dos miembros de una desigualdad les sumamos el mismo número entero, obtendremos otra desigualdad del mismo sentido.

3.° Si $\forall\ (a \text{ y } b) \in Z$ y $(c \text{ y } d) \in Z$ y $\left.\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} a + c > b + c \\ c + b > b + d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a + c > b + d$

Sumando m. a m. dos desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

4.° Sean $\forall\ (a,\ b \text{ y } c) \in Z$, de modo que $a > b$, se tiene

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ -c = -c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a + (-c) > b + (-c) \Longrightarrow a - c > b - c$$

Restando de ambos miembros de una desigualdad un mismo número, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

5.° Sean $\forall\ (a,\ b \text{ y } c) \in Z$, si $a > b$, se tiene

$$\left.\begin{matrix} c = c \\ -a < -b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow c + (-a) < c + (-b) \Longrightarrow c - a < c - b$$

Restando de un mismo número los dos miembros de una desigualdad, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario.

6.° Siendo $\forall (a, b, c \text{ y } d) \in Z$, de modo que $a > b$ y $c < d$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ -c > -d \end{array}\right\} \Longrightarrow a + (-c) > b + (-d) \Longrightarrow a - c > b - d$$

Restando m. a. m. dos desigualdades de distinto sentido, se obtiene otra desigualdad del sentido de la tomada por minuendo.

7. Multiplicación. — *Llamamos producto de dos números en Z,* (a; b) *y* (c; d), *a otro número definido por* (ac+bd; bc+ad). El producto se indica:

$$(a; b) \times (c; d) = (ac+bd; bc+ad)$$

Cada uno de los números dados se llama *factor* y el resultado *producto.*

EJEMPLOS: $(5; 2) \times (7; 6) = (35+12; 30+14) = (47; 44) = (3; 0)$

En la forma canónica

$(5; 0) \times (8; 0) = (40; 0)$ se expresa $(+5) \times (+8) = +40$
$(6; 0) \times (0; 3) = (0; 18)$ se expresa $(+6) \times (-3) = -18$

Y en general,

$(a; 0) \times (b; 0) = (ab; 0)$ se expresa $(+a) \times (+b) = +ab$
$(0; a) \times (0; b) = (ab; 0)$ se expresa $(-a) \times (-b) = +ab$
$(a; 0) \times (0; b) = (0; ab)$ se expresa $(+a) \times (-b) = -ab$
$(0; a) \times (b; 0) = (0; ab)$ se expresa $(-a) \times (+b) = -ab$

El producto de dos números enteros es otro número entero, cuyo signo es: *positivo, si ambos números o factores tienen el mismo signo,* y *negativo, si lo tienen diferente, y cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los factores.*

Denominamos producto de varios números al producto de los dos primeros, multiplicado por el tercero y el resultado por el cuarto, y así sucesivamente. Es fácil ver que el producto de varios números enteros es otro número entero que tiene por valor absoluto el producto de los valores absolutos de los factores y signo más si el número de factores negativos es par y menos en caso contrario.

EJEMPLOS: $(-a) \times (+b)(-p) \times d = +abpd$
$(-n) \times (+p)(-q)(-m) = -npqm$

8. Propiedades de la multiplicación de números enteros. — La definición dada de producto nos autoriza a afirmar que el producto de números enteros es: *Uniforme,* pues es único el valor absoluto y único el signo del producto de varios factores.

Conmutativo, pues ni cambia el signo ni el valor absoluto del producto al cambiar el orden de los factores.

Asociativo, por la misma razón.

Existe un elemento, $(1;\ 0) = +1$, que es *neutro* para la multiplicación. En efecto:

$$(a;\ b)\,(1;\ 0) = (1;\ 0)\,(a;\ b) = (a+0;\ b+0) = (a;\ b)$$

Obsérvese que el producto de $(0;\ 0)$ por cualquier número es nulo, como se ve en

$$(a;\ b)\,(0;\ 0) = (0;\ 0) = 0$$

Propiedad distributiva respecto a la suma

$$(m;\ n)\,[(a;\ b) + (c;\ d)] = (m;\ n)\,(a+c;\ b+d) =$$
$$= (ma+mc+nb+nd;\ na+nc+mb+md)$$

$$(m;\ n)\,(a;\ b) + (m;\ n)\,(c;\ d) = (ma+nb;\ na+mb) + (mc+nd;\ md+nc) =$$
$$= (ma+nb+mc+nd;\ na+mb+md+nc)$$

Por consiguiente,

$$(m;\ n)\,[(a;\ b) + (c;\ d)] = (m;\ n)\,(a;\ b) + (m;\ n)\,(c;\ d)$$

o bien

$$\eta\,(\alpha+\beta) = \eta\alpha + \eta\beta$$

Luego la multiplicación es distributiva respecto a la suma en Z.

9. El conjunto *Z* forma anillo conmutativo y con unidad. — Los números enteros forman anillo, pues poseen dos operaciones internas que satisfacen a las siguientes propiedades:

1.ª *La Adición, respecto a la cual forman grupo abeliano,* pues es

operación interna:

$$(-5),\ (+3) \in Z \Longrightarrow (-5) + (+3) = -2 \in Z$$

asociativa:

$$(-6),\ (+7),\ (-4) \in Z \Longrightarrow [(-6) +7] + (-4) =$$
$$= (-6) + [(+7) + (-4)] = -3 \in Z$$

conmutativa:

$$(+10),\ (-6) \in Z \Longrightarrow (+10) + (-6) = (-6) + (+10) = +4 \in Z$$

Existe un elemento neutro:

$$(0;\,0) \in Z \Longrightarrow (0;\,0) + (5;\,2) = (5;\,2) = +3 \in Z$$
$$0 \in Z \Longrightarrow 0 + 3 = 3 \in Z$$

A todo número le corresponde otro simétrico, pues

$$6 \quad \text{y} \quad (-6) \in Z \Longrightarrow 6 + (-6) = 0$$

2.ª *La Multiplicación con las siguientes propiedades*

es operación interna:

$$(-7) \quad \text{y} \quad (+6) \in Z \Longrightarrow (-7) \times (+6) = -42 \in Z$$

asociativa, pues

$$(-5),\ (+7),\ (-4) \in Z \Longrightarrow [(-5) \times (+7)] \times (-4) =$$
$$= (-5) \times [(+7) \times (-4)] = 140$$

distributiva respecto a la suma:

$$(-4),\ (+6),\ (-3) \in Z \Longrightarrow (-4)[(+6) + (-3)] = (-4)(+6) + (-4)(-3)$$

por lo que Z *forma un anillo* y como además la multiplicación es

conmutativa:

$$(-8),\ (+6) \in Z \Longrightarrow (-8) \times (+6) = (+6) \times (-8) = -48$$

y posee un elemento neutro, llamado unidad

$$1 \quad \text{y} \quad (-7) \in Z \Longrightarrow 1 \times (-7) = -7$$

Z es un anillo conmutativo con unidad.

10. Leyes de monotonía de la multiplicación en Z. — 1.ª *Producto de los dos miembros de una desigualdad por un número.*

Sean $\forall\ (a \text{ y } b) \in Z$, de modo que $a > b \Longrightarrow a - b = a'$ positivo.
Si $n > 0 \Longrightarrow (a-b)n = an - bn = a'n$ positivo $\Longrightarrow an > bn$
Si $n < 0 \Longrightarrow (a-b)n = an - bn = a'n$ negativo $\Longrightarrow an < bn$

Al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un número, resulta otra desigualdad del mismo sentido, si el número es positivo y de sentido contrario si es negativo.

2.ª Producto de dos desigualdades.

Sean $\forall\ (a,\ b,\ c \text{ y } d)$ de modo que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $d > 0$

$$\text{Si} \quad \left.\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad \left.\begin{matrix} ac > bc \\ cb > db \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad ac > bd$$

Multiplicando m. a. m. dos desigualdades del mismo sentido y miembros positivos se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

Si $-a<0,\ -b<0,\ -c<0$ y $-d<0$, y además

$$\left.\begin{matrix} -a>-b \\ -c>-d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ac<bc \\ cb<db \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac<db$$

Multiplicando m. a. m. dos desigualdades del mismo sentido y miembros negativos, resulta otra desigualdad de sentido contrario a las dadas.

Si $a>0;\ b>0;\ c>0$ y $d>0$ y además

$$\left.\begin{matrix} a>b \\ -c<-d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd \Rightarrow -ac<-bd$$

Multiplicando m. a. m. dos desigualdades de distinto sentido, teniendo una los miembros positivos y la otra negativos, resulta otra desigualdad del mismo sentido que la que tiene sus miembros negativos.

8. Números congruentes en Z

1. Definiciones. — *Dos números* (A y B) $\in$ Z *son congruentes respecto al número no nulo* n $\in$ N, *si la diferencia* A − B *es un múltiplo de* n.

Al número *n* se le denomina módulo de la congruencia.

EJEMPLO: 18 y 23 son congruentes respecto al módulo 5, pues

$$23 - 18 = 5 = \dot{5}$$

Indicaremos que *A* y *B* son congruentes respecto al módulo *n*, poniendo

$$A - B = \dot{n} \quad \text{o bien} \quad A \equiv B\,(n)$$

que se lee: *A* congruente con *B*, módulo *n*.

De la definición se deducen las propiedades de la congruencia:

Reflexiva:

$$A \equiv A\ (n) \quad \text{pues} \quad A - A = 0 = \dot{n}$$

Simétrica:

$$A \equiv B\,(n) \Longrightarrow B \equiv A\,(n); \quad \text{pues} \quad A - B = \dot{n} \Longrightarrow B - A = -\dot{n} = \dot{n}$$

Transitiva:

$$A \equiv B\,(n) \quad \text{y} \quad B \equiv C\,(n) \Longrightarrow A \equiv C\,(n)$$

Pues, existen k_1 y $k_2 \in N$, tales que

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \dot{n} = k_1 n \\ B - C = \dot{n} = k_2 n \end{array}\right\} \Longrightarrow A - C = (A-B) + (B-C) = n\,(k_2 + k_1) = \dot{n}$$

2. Clases de números congruentes. — *La condición necesaria y suficiente para que dos números* A *y* B $\in$ Z *sean congruentes respecto a otro* n, *entero y positivo, es que los restos de dividirlos por* n *sean iguales.*

En efecto:

$$\text{Si} \left\{\begin{array}{l} A = nq_1 + r \\ B = nq_2 + r \end{array}\right. \quad \text{y} \quad n > r > 0 \Longrightarrow A - B = n\,(q_1 - q_2) = \dot{n} \Longrightarrow A \equiv B\,(n)$$

Recíprocamente,

si $A \equiv B\,(n)$, será

$$\begin{cases} A - B = \dot{n} \\ B = nq + r \end{cases} \quad \text{y} \quad r < n \Longrightarrow A = B + \dot{n} = qn + r + \dot{n} = \dot{n} + r$$

Por consiguiente, r es el resto de dividir A por n, pues

$$A = q'n + r$$

Ahora bien, al dividir el conjunto de números Z por n, será posible obtener los n restos siguientes, supuestos positivos,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (n-1) \qquad \text{[8-a]}$$

Esto nos permite agrupar los números de Z, de modo que se encuentren en el mismo grupo los números que dan el mismo resto respecto a n, es decir, sean congruentes. Cada uno de los grupos así formados se denomina *clase residual* y el conjunto de ellos se designará por el símbolo $\frac{Z}{n}$.

EJEMPLOS:

Las clases $\frac{Z}{2}$ son: $\begin{matrix} 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ -2,\ -4,\ \ldots \\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ -1,\ -3,\ \ldots \end{matrix}$ se representan así $\frac{Z}{2} = \left\{\dot{0},\ \dot{1}\right\}$

$$\frac{Z}{5} \quad \begin{cases} 0,\ 5,\ 10,\ \ldots\ -5,\ -10,\ \ldots \\ 1,\ 6,\ 11,\ \ldots\ -1,\ -6,\ \ldots \\ 2,\ 7,\ 12,\ \ldots\ -2,\ -7,\ \ldots \\ 3,\ 8,\ 13,\ \ldots\ -3,\ -8,\ \ldots \\ 4,\ 9,\ 14,\ \ldots\ -4,\ -9,\ \ldots \end{cases} \Longrightarrow \frac{Z}{5} = \left\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4}\right\}$$

Si escribimos un conjunto de n números de forma que cada uno de ellos pertenezca a diferente clase de $\frac{Z}{n}$, habremos obtenido un sistema completo de números incongruentes de módulo n, el cual podrá representar a todas las clases. El sistema completo más sencillo es el [8-a], escrito anteriormente.

Una clase cualquiera a la que pertenezca a, siendo n el módulo, se representa así

$$a + (n)$$

símbolo que representa a uno cualquiera de los números de la clase y expresa

$$a + (n) = a + \dot{n} = a + kn$$

Dos números así representados son congruentes, pues

$$(a+\dot{n}) - (a+\dot{n}) = \dot{n}$$

3. Igualdad de clases. — *La condición necesaria y suficiente para que dos clases,* a + (n) *y* b + (n), *respecto al mismo módulo, sean iguales, es que* a ≡ b (n).

En efecto, si son iguales dos elementos cualesquiera

$$a + (n) = b + (n) \Longrightarrow a + \dot{n} = b + \dot{n} \Longrightarrow a - b = \dot{n} - \dot{n} = \dot{n} \Longrightarrow a \equiv b\,(n)$$

Recíprocamente, si

$$a \equiv b\,(n) \Longrightarrow a - b = \dot{n} \Longrightarrow a = b + \dot{n}$$

por consiguiente, sumando a los dos miembros $\dot{n}$, se tiene

$$a + \dot{n} = b + \dot{n} \Longrightarrow a + (n) = b + (n)$$

EJEMPLO:

$$8 + (5) = 23 + (5) \longrightarrow 8 \equiv 23\,(5) \quad \text{pues} \quad 8 - 23 = -15 = \dot{5}$$

4. Suma y producto de dos clases. — *Si tenemos dos clases* a + (n) *y* b + (n) *respecto al mismo módulo y sumamos parejas de números tomados uno de cada una de ellas, obtendremos sumas congruentes entre sí,* es decir, pertenecientes todas ellas a la misma clase.

En efecto, cualquiera que sean k_1 y $k_2 \in Z$, las sumas

$$[a+(n)] + [b+(n)] = a + k_1 n + b + k_2 n = a + b + \dot{n} = a + b + (n)$$

pertenecen a la misma clase $a + b + (n)$.

De la misma manera, el producto de parejas de números tomados uno de cada clase, pertenecen todos ellos a una misma clase.

En efecto, lo mismo que antes,

$$[a+(n)] \cdot [b+(n)] = (a+k_1 n)\,(b+k_2 n) = ab + \dot{n} = ab + (n)$$

Estas propiedades nos permiten definir la suma y producto de clases residuales del mismo módulo.

Llamamos suma de dos clases residuales a + (n) *y* b + (n), *referentes al mismo módulo* n, *a la clase* a + b + (n).

Y del mismo modo, se denomina producto de dos clases residuales a + (n) *y* b + (n), *respecto al mismo módulo; a la clase residual* ab + (n).

EJEMPLO: Sean las clases 8 + (3) y 15 + (3).

La clase de la suma será

$$23 + (3)$$

El producto

$$120 + (3)$$

La suma y producto de varias clases se definirá como la suma y producto de las dos primeras, y la resultante operar con la tercera, y así sucesivamente.

5. Propiedades de la suma y producto de dos clases residuales Z/n. — La suma así definida es

Uniforme, pues según [8-3] y [8-1], se tiene:

$$\text{Si } \begin{cases} a + (n) = a' + (n) \\ b + (n) = b' + (n) \end{cases} \text{ para cualquier término } \begin{cases} a \equiv a'(n) \\ b \equiv b'(n) \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a = a' + \dot{n} \\ b = b' + \dot{n} \end{matrix}$$

y sumando m. a. m. estas igualdades, resulta

$$(a+b) = (a'+b') + \dot{n} \Longrightarrow (a+b) - (a'+b') = \dot{n}$$

Como es válido para cualquier término, se puede poner así,

$$a + b + (n) = a' + b' + (n)$$

Si en lugar de sumar, multiplicamos m. a m. las igualdades anteriores, resulta, teniendo en cuenta (8-4)

$$ab = a'b' + \dot{n} \Longrightarrow ab - a'b' = \dot{n} \Longrightarrow ab + (n) = a'b' + (n)$$

Conmutativa:

Sean las clases $a + (n)$ y $b + (n)$, se puede poner:

$$a + (n) + b + (n) = a + b + (n) = b + a + (n) = b + (n) + a + (n)$$

que demuestra la propiedad.

Téngase en cuenta que $a + b = b + a$, pues $(a, b) \in Z$.

Asociativa: Si $a + (n)$, $b + (n)$ y $c + (n)$ son tres clases respecto al módulo n, se tiene:

$$a + (n) + [b+(n) + c+(n)] = a+(n) + [b+c+(n)] = a + b + c + (n)$$
$$[a+(n) + b+(n)] + c+(n) = [a+b+(n)] + c+(n) = a + b + c + (n)$$

Por consiguiente:

$$[a+(n) + b+(n)] + c + (n) = a + (n) + [b+(n) + c + (n)]$$

Elemento neutro en la suma es la clase $0 + n$, pues si $a + (n)$ es una clase cualquiera, ambas referentes al módulo n, se tendrá:

$$a + (n) + 0 + (n) = a + (n)$$
$$0 + (n) + a + (n) = a + (n)$$

De la multiplicación es $1 + (n)$, pues

$$[a + (n)][1 + (n)] = a \cdot 1 + (n) = a + (n)$$

Finalmente, *la multiplicación es conmutativa y asociativa* y su demostración es del todo semejante a como se ha hecho con la suma. A continuación probaremos que *la multiplicación es distributiva respecto a la suma en* Z/n.

En efecto, considerando las clases anteriores, se tiene:

$$[a+(n) + b+(n)]\,[(c+(n)] = [a+b+(n)]\,[c + (n)] = ac + bc + (n)$$

Da el mismo resultado que si

$$[a+(n)]\,[c+(n)] + [b+(n)]\,[c+(n)] = ac + (n) + bc + (n) = ac + bc + (n)$$

6. Tablas de sumar y multiplicar. — Como ejercicio pondremos las tablas de sumar y multiplicar las clases, módulo 6.

TABLA DE SUMAR

0 + (6)	1 + (6)	2 + (6)	3 + (6)	4 + (6)	5 + (6)
1 + (6)	2 + (6)	3 + (6)	4 + (6)	5 + (6)	0 + (6)
2 + (6)	3 + (6)	4 + (6)	5 + (6)	0 + (6)	1 + (6)
3 + (6)	4 + (6)	5 + (6)	0 + (6)	1 + (6)	2 + (6)
4 + (6)	5 + (6)	0 + (6)	1 + (6)	2 + (6)	3 + (6)
5 + (6)	0 + (6)	1 + (6)	2 + (6)	3 + (6)	4 + (6)

TABLA DE MULTIPLICAR

	1 + (6)	2 + (6)	3 + (6)	4 + (6)	5 + (6)
1 + (6)	1 + (6)	2 + (6)	3 + (6)	4 + (6)	5 + (6)
2 + (6)	2 + (6)	4 + (6)	0 + (6)	2 + (6)	4 + (6)
3 + (6)	3 + (6)	0 + (6)	3 + (6)	0 + (6)	3 + (6)
4 + (6)	4 + (6)	2 + (6)	0 + (6)	4 + (6)	2 + (6)
5 + (6)	5 + (6)	4 + (6)	3 + (6)	2 + (6)	1 + (6)

7. Cociente de clases en *Z/n.* — *Denominaremos cociente de las clases* a + (n) *y* b + (n), *referentes al módulo* n, *a la clase* c + (n), *tal que*

$$a + (n) = [b+(n)] \cdot [c+(n)]$$

Demostraremos que: *si* n *es primo, existe un único cociente de dos clases residuales cualesquiera de módulo* n, *con tal que la clase divisor no sea cero.*

En efecto, representaremos las clases residuales por el sistema completo de números incongruentes, más sencillo, módulo n, que es

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, a, \ldots, b, \ldots, (n-1) \qquad [8\text{-b}]$$

Todos estos números menores que n y positivos son primos con n. Por otra parte, si h no es divisible por n, nos permite escribir

$$0, h, 2h, 3h, 4h, \ldots, ah, \ldots, bh, \ldots, (n-1)h \qquad [8\text{-c}]$$

que es otro sistema completo de números incongruentes módulo n, pues comprende n números y todos incongruentes, pues si dos fueran congruentes, por ejemplo rh y sh, se tendría

$$rh \equiv sh\,(n) \Longrightarrow (r-s)h = \dot{n}$$

pero n, que divide al primer miembro, no divide a h por hipótesis y tampoco al otro factor, pues lo contrario supondría

$$r - s = \dot{n} \qquad r \equiv s\,(n)$$

contra la hipótesis.

La [8-c] es pues un sistema completo, por lo tanto habrá un número, ah, por ejemplo, siendo a perteneciente a [8-b], que será congruente con 1. Así

$$ah \equiv 1\,(n) \Longrightarrow ah - 1 = \dot{n} \Longrightarrow a(hb) - b = \dot{n}$$

Esto último equivale a

$$b + (n) = (bh)\,a + (n) = [bh + (n)] \cdot [a + (n)]$$

Por lo tanto,

$$[b + (n)] : [a + (n)] = bh + (n)$$

Existe pues la clase $hb + (n)$, cociente de las otras dos y es única, pues de lo contrario el producto no sería uniforme.

8. Propiedades de los números congruentes. — 1.ª Si $A \equiv B\,(n)$ y además $A = A'h$, $B = B'h$ y $n = n'h$, será $A' \equiv B'(n')$.

En efecto,

$$A - B = \dot{n} = nk \Longrightarrow A'h - B'h = n'hk$$

Por consiguiente,

$$A' - B' = n'k = \dot{n}' \Longrightarrow A' \equiv B'(n')$$

2.ª Si A y $B \in Z$ son múltiplos de h y $A \equiv B\,(n)$, siendo h y n primos, serán congruentes respecto a n, los cocientes de dividir A y B por h.

En efecto, si $A \equiv B\,(n)$, $A = A'h$ y $B = B'h$, será

$$A - B = \dot{n} = kn \Longrightarrow (A'-B')\,h = kn$$

Pero h, que divide kn y es primo con n, necesariamente dividirá a k, es decir, que

$$k = k'h$$

Por consiguiente

$$A' - B' = k'n = \dot{n} \Longrightarrow A' \equiv B'(n)$$

3.ª Si $A \equiv B\,(n)$ y además $A = A'h$ y $B = B'h$, resultan A' y B' congruentes respecto al cociente de dividir n por el m. c. d. de n y h.

Efectivamente, sean d = m. c. d. (n y h), $n = n'd$, $h = h'd$, por lo que n' y h' son primos entre sí. Se puede poner

$$A'h \equiv B'h\,(n'd) \Longrightarrow A'h'd \equiv B'h'd\,(n'd)$$

Por el primer apartado se puede simplificar d y queda

$$A'h' \equiv B'h'(n')$$

Por el segundo apartado se deduce que

$$A' \equiv B'(n')$$

lo que se quería demostrar.

9. Propiedades de las clases residuales Z/n. — Si h es un número primo y n no múltiplo de h, se verifica $n^{h-1} + (h) = 1 + (h)$.

En efecto, si

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ (h-1)$$

es el sistema completo más sencillo de números incongruentes módulo h, también es un sistema completo, según se vio,

$$0,\ n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \ldots\ (h-1)n$$

Esto quiere decir que cada número del primer sistema tiene su congruente módulo h, en el segundo. Suprimiendo los términos nulos, nos quedarían $h - 1$ congruencias, y por tanto $h - 1$ igualdades de clases. Multiplicándolas m. a m., se obtiene

$$n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot \ldots (h-1)n + (h) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (h-1) + (h)$$

Simplificando, queda

$$n^{h-1} + (h) = 1 + (h)$$

que es lo que queríamos demostrar. Esta es una forma de presentar la congruencia de Fermat.

2.ª Si $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ es un sistema completo de números incongruentes respecto a n, también lo es el sistema

$$b + a_1h,\ b + a_2h,\ b + a_3h,\ \ldots\ b + a_{n-1}h$$

siempre que h no sea divisible por n.

En efecto, supuestos congruentes los términos i y j, tendríamos

$$b + a_ih \equiv b + a_jh\,(n) \Longrightarrow h\,(a_i - a_j) = \dot{n}$$

Pero n no divide a h, por tanto divide al otro factor

$$a_i - a_j = \dot{n}$$

cosa imposible por hipótesis.

9. Teoría de la divisibilidad en Z

1. Múltiplos y divisores de varios números: Definición. — Si los números a, b y $m \in Z$ y entre ellos existe la relación

$$ab = m$$

se dice que m es un múltiplo de a y b, y que a y b son divisores de m.

Entre todos los divisores *comunes* de varios números hay uno que es el mayor, al cual se llama *máximo común divisor (m. c. d.).*

Y entre todos los múltiplos *comunes* de varios números hay uno que es el menor, al cual se llama *mínimo común múltiplo (m. c. m.).*

Cuando dos números no tienen más divisores comunes que la unidad, se dice que son *primos entre sí.*

De aquí deducimos como corolarios: que el máximo común divisor de ab y b, es b, y que el mínimo común múltiplo de ab y b, es ab.

Igualmente, cuando un número no tiene más divisores que a sí mismo y a la unidad, se dice que es *primo absoluto,* y en caso contrario, *compuesto.*

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva de la multiplicación, podemos poner, si a, b y $m \in Z$

$$am \pm bm = m(a \pm b) = \dot{m} \qquad [9\text{-a}]$$

es decir, que la suma o diferencia de dos múltiplos, am y bm, de un número m, es a la vez múltiplo de dicho número, o bien, si un número m es divisor de dos números, lo es también de su suma y diferencia.

La [9-a] puesta así:

$$am = m(a \pm b) \mp bm = \dot{m}$$

expresa que *si un número divide a la suma o diferencia de dos números y a uno de ellos, también divide al otro.*

2. Teorema fundamental de los divisores comunes a dos números enteros. — *Los divisores comunes de dos números enteros, son los divisores comunes del menor de ellos, y el resto de la división del mayor por el menor.*

Sean los números enteros D y d, q el cociente entero de ambos y r el resto, también entero, tendremos:

$$D = dq + r$$

Teniendo en cuenta lo demostrado en el párrafo anterior, podemos afirmar, que todo divisor de D y d, lo es de dq, y por tanto de r; y todo divisor de r y d, por serlo de r y dq, lo es de D.

Es decir, que las parejas D y d por una parte, y d y r por otra, tienen los mismos divisores comunes. Esto nos autoriza a afirmar que

$$\text{m. c. d. } (D, d) = \text{m. c. d. } (d, r)$$

3. Cálculo del m. c. d. de dos números: Algoritmo de Euclides. — Según el teorema anterior, para hallar el m. c. d. de dos números A y B, es suficiente que se halle el del menor y del resto de dividir aquél por éste. Aplicando sucesivamente esta propiedad llegamos a una división exacta por lo menos, cuando el último divisor es la unidad, pues los restos van disminuyendo al tener que ser menores que los respectivos divisores. Se le suele dar la siguiente forma:

	q_1	q_2	q_3	q_{n+1}	q_{n+2}	q_{n+3}
A	B	r_1	r_2	... r_n	r_{n+1}	r_{n+2}
r_1	r_2	r_3		r_{n+2}	0	

Al conjunto de todas estas operaciones se llama *Algoritmo de Euclides.*

Según el teorema 9-2,

$$\text{m. c. d. } (A, B) = \text{m. c. d. } (B, r) = \text{m. c. d. } (r_1, r_2) =$$
$$= \text{m. c. d. } (r_2, r_3) = \ldots = \text{m. c. d. } (r_{n+1}, r_{n+2}) = r_{n+2}$$

Esto último según el primer corolario.

Luego, el último resto distinto de 0 es el máximo común divisor de A y B.

Por otra parte, los divisores comunes de A y B son los mismos que los de B y r, y éstos, que los de r_1 y r_2 ... y que los de r_{n+1} y r_{n+2}, y que los de r_{n+2} y 0, es decir, que los de r_{n+2}.

Los divisores comunes de A *y* B *son los divisores de su máximo común divisor, y sólo éstos.*

EJEMPLO: Hallar el m. c. d. de 1.386 y 348

	3	1	57
1.386	348	342	6
342	6	0	

Luego, el m. c. d. (1.386, 348) = 6.

Dejamos que el lector enuncie la regla para hallar el m. c. d. de dos números.

4. Propiedades del m. c. d. de dos números. — 1.ª *Si dos números A y B* $\in Z$ *se multiplican o dividen por un número n, no nulo y entero, su máximo común divisor queda multiplicado o dividido por dicho número,* es decir, que si

$$\text{m. c. d. } (A, B) = a \quad \text{será} \quad \text{m. c. d. } (An, Bn) = an$$

En efecto, al multiplicar o dividir A y B por n, queda multiplicado o dividido r, por el mismo número, y por lo mismo cada uno de los sucesivos restos del Algoritmo de Euclides, el último de los cuales es el m. c. d.

2.ª *Los cocientes de dividir dos números por su m. c. d. son primos entre sí, pues tienen por m. c. d. la unidad.*

3.ª *Si un número* n, *entero y no nulo, divide a un producto de dos factores* ab *y es primo con uno de ellos, divide al otro.*

En efecto, si n es primo con a, se puede poner

$$\text{m. c. d. } (a, n) = 1 \Longrightarrow \text{m. c. d. } (ba, nb) = b$$

Pero n por dividir a ab por hipótesis y a bn, divide a b.

5. Divisores comunes y m. c. d. de varios números. — I. *Los divisores comunes de los números* A, B, C, D, ... H, *son los divisores comunes de* d, C, D, ... H, *siendo*

$$d = \text{m. c. d. } (A, B)$$

En efecto, los divisores de A y B son los divisores de d; luego todo divisor común de $A, B, C, D, \ldots H$, lo es de $d, C, D, \ldots H$.

Recíprocamente, todo divisor de d, lo es de A y B, según el número 3 de esta lección; luego todo divisor común de $d, C, D, \ldots H$, lo será de $A, B, C, D, \ldots H$, es decir, que ambos grupos tienen los mismos divisores comunes.

Por consiguiente,

$$\text{m. c. d. } (A, B, C, D, \ldots H) = \text{m. c. d. } (d, C, D, \ldots H)$$

Aplicando sucesivamente esta propiedad, llegaremos a obtener el m. c. d. de los números dados. Enúnciese la regla.

II. De lo anteriormente expuesto se deduce que *todos los divisores comunes a varios números son los divisores de su m. c. d. y sólo éstos.*

6. Múltiplos comunes de dos números. Propiedades. — Si A y $B \in Z$ tienen d por m. c. d. y M es un múltiplo común cualquiera, se tiene:

$$A = da \quad \text{y} \quad B = db$$

siendo a y b los cocientes de dividir A y B por d, que son primos entre sí.

Por otra parte, será:

$$M = Ap = dap = Bq = dbq$$

luego $ap = bq$; pero b es primo con a; por tanto, es divisor de p y se podrá poner:

$$p = bn$$

Lo cual nos permite expresar la siguiente igualdad:

$$M = dabn$$

Podemos, pues, decir que *un múltiplo de dos números es igual a un producto de cuatro factores; el m. c. d. de ambos números, sus cocientes por éste y un entero cualquiera.*

Es evidente que obtendremos el menor múltiplo de A y B, distinto de cero, haciendo $n = 1$; a ese múltiplo se le llama *mínimo común múltiplo,* y por lo dicho será,

$$\text{m. c. m. } (A, B) = dab = Ab$$

De todo lo dicho deducimos las siguientes

PROPIEDADES:

1.ª *El mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de uno de ellos por el cociente de dividir el otro por su m. c. d.*

2.ª *Los múltiplos comunes de dos números* A *y* B *son los múltiplos de su m. c. m.,* que se obtienen haciendo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

3.ª *Todo múltiplo de dos números primos es múltiplo de su producto.*

EJEMPLOS:

m. c. d. $(12, 18) = 6 \Longrightarrow$ m. c. m. $(12, 18) = \dfrac{12}{6} \cdot 18 = 36$

Múltiplos de 12 y 18 son $\dfrac{12}{6} \cdot \dfrac{18}{6} \cdot 6 \cdot n = 36, 72, \ldots$

m. c. d. $(18, 35) = 1$

Múltiplos de 18 y 35 son $\dfrac{18}{1} \cdot \dfrac{35}{1} \cdot 1 \cdot n = 630, 1.260, \ldots$

7. **Múltiplos comunes y m. c. m. de varios números.** — *Los múltiplos comunes a varios números* A, B, C, D, ... H, *son los mismos múltiplos comunes de* M, C, D, ... H, *siendo* M = *m. c. m.* (A, B).

En efecto: todo múltiplo común de A y B, es múltiplo de M; luego los múltiplos comunes de $A, B, C, D, \ldots H$, son múltiplos de $M, C, D, \ldots H$.

Recíprocamente: todo múltiplo de M lo es de A y B; luego los múltiplos comunes de $M, C, D, \ldots H$, son múltiplos de $A, B, C, D, \ldots H$, con lo que queda probado.

Por consiguiente

$$\text{m. c. m. } (A, B, C, D, \ldots H) = \text{m. c. m. } (M, C, D, \ldots H)$$

De aquí resulta una regla muy sencilla para hallar el m. c. m. de varios números, que consiste en hallar el m. c. m. de los dos primeros números, y luego el m. c. m. del resultado y del siguiente número, y así sucesivamente hasta operar con el último número. El m. c. m. obtenido al final será el m. c. m. de los números dados.

Del razonamiento anterior deducimos, además:

Los múltiplos comunes de varios números, son los múltiplos de su m. c. m.

EJEMPLO: Para hallar m. c. m. (24, 42, 78),

hallamos $\qquad$ m. c. m. $(24, 42) = 168$

y luego $\qquad$ m. c. m. $(168, 78) = 2.184$

Por tanto m. c. m. (24, 42, 78) = 2.184.

8. Números primos absolutos: Propiedades. — Hemos llamado número primo absoluto al que no tiene más divisores que a sí mismo y a la unidad; ejemplo, el 7. El número que no es primo, se llama *compuesto.*

De la definición deducimos las siguientes

PROPIEDADES:

1.ª *Un número primo absoluto es primo con los números menores que él, a excepción hecha de la unidad.*

2.ª *Todo número no primo es un producto de factores primos.*

En efecto, si el número A no es primo, es compuesto, y por tanto, admite dos o más divisores; el menor de ellos, a, ha de ser primo, pues en caso contrario admitiría un divisor $a' < a$, que lo sería de A, contra la hipótesis. Por tanto: $A = a \cdot A'$, siendo a primo.

De la misma manera, si A' no es primo, será $A' = a' \cdot A''$, siendo a' primo. De aquí que $A = aa'A''$.

Si seguimos así, la serie de números $A', A'', \ldots$ no se puede prolongar indefinidamente, pues son números naturales mayores que 1, y que van disminuyendo. Esto nos dice que se ha de llegar a

$$A = a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots n$$

en el que todos los factores sean primos.

La forma más general que presentará la descomposición en factores primos será:

$$A = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots n^{\delta}$$

en la que los exponentes representan las veces que cada factor se repite.

3.ª *Un número admite una descomposición en factores primos única.*

En efecto, supongamos que hemos descompuesto el número A de las dos formas siguientes:

$$A = a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots n \qquad \text{y} \qquad A = a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' \ldots n'$$

Será:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots n = a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' \ldots n'$$

Pero a, por dividir al primer miembro, divide también al segundo

$$a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' \ldots n' = a' \cdot (b' \cdot c' \cdot d' \ldots n')$$

y, por dividir a un producto de dos números y ser primo, divide, por lo menos, a uno de ellos.

Si divide al primero será necesariamente $a = a'$ porque los dos son primos. En caso contrario divide a

$$b' \cdot c' \cdot d' \ldots n' = b' \cdot (c' \cdot d' \ldots n')$$

por lo que será $a = b'$ o divide al segundo factor.

Continuando así hasta el último factor sería $n' = a$ si antes no hubiéramos encontrado uno que sea igual a él.

Luego, necesariamente a ha de ser igual a uno de los factores de la segunda descomposición, por ejemplo $a = a'$.

De la misma manera razonaríamos que: $b = b'$, $c = c'$, ...

Esto nos dice que es indiferente dar comienzo a la descomposición por cualquier factor.

4.ª *La sucesión de los números primos es indefinida.* En efecto, sea 2, 3, 5, 7, ... n, los n primeros números primos.

Podemos poner

$$p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times n + 1$$

Si p es primo, queda demostrado que existe un número primo mayor que otro dado n; si no lo es, será compuesto, y admitirá algún divisor primo, que no será ninguno de los dados, pues al dividir a un sumando debería dividir otro que es 1, luego será mayor que n, lo cual demuestra lo mismo.

9. Obtención de los números primos. — *a)* Dado un número A, vayamos probando sucesivamente si es divisible por la serie de números primos: 2, 3, 5, 7, ... Si llegamos a un número n primo tal que $n^2 > A$, sin que ninguna de las divisiones sea exacta, entonces podremos afirmar que A es primo.

Efectivamente, si A tiene algún divisor primo, será mayor que n, por ejemplo: $a > n$, entonces será $A = aq < nn$.

Ello supone que $q < n$; y entonces, si q es primo, A será divisible por él. Si q es compuesto, A será divisible por uno de sus divisores menores que q, y por ende,

menores que n; y en ambos casos, A tendrá un divisor menor que n, contra lo supuesto. Por tanto, según el enunciado, A no tiene ningún divisor, ni mayor ni menor que n, luego es primo.

b) Se puede obtener de una manera sencilla, utilizando la tabla o criba de Eratóstenes, que se forma del siguiente modo:

Se escriben los números 1 y 2, y a continuación todos los números impares hasta el límite prefijado. Luego, a partir del $3^2 = 9$, se tachan de tres en tres, con lo que se suprimen los múltiplos de 3 impares. El primer número que encontramos a continuación no tachado, es el 5, número primo que sigue al 3. Seguimos tachando de 5 en 5 a partir del $5^2 = 25$; así quedan suprimidos los múltiplos de 5 que quedaban. Se hace lo mismo con el 7, siguiente número primo; con el 11, hasta encontrar un número primo cuyo cuadrado no se encuentre en la tabla. Los números no tachados son los números primos inferiores al límite fijado para la tabla.

Efectivamente: pues un número cualquiera n no tachado no es divisible, ni por el número primo a, ni por otro número menor que a, siendo $a^2 > n$, y según el caso anterior n es primo.

10. M. c. d. y m. c. m. de varios números. Obtención. — Hemos dicho que todo número no primo es compuesto, y que una vez descompuesto en sus factores primos presenta la forma $a \cdot b \cdot c \ldots n$, siendo $a, b, c, \ldots n$ números primos.

Ahora podemos afirmar:

1.° *Que si tenemos dos números,*

$$A = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots n^{\delta} \qquad \text{y} \qquad B = a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'} \cdot c^{\gamma'} \ldots n^{\delta'}$$

descompuestos en sus factores primos, el primero será divisible por el segundo, si contiene todos los factores primos de éste, elevados a exponentes iguales o mayores.

Efectivamente, si

$$\alpha \geqq \alpha' \qquad \beta \geqq \beta' \qquad \gamma \geqq \gamma' \qquad \delta \geqq \delta'$$

podremos agrupar los factores primos de A en dos grupos: uno que contenga los factores primos de B, y en otro los demás. Así podemos poner

$$A = Bn$$

Luego, la condición es *suficiente,* pero también *necesaria,* pues para que sea posible la división exacta de A por B, es necesario que sea posible la agrupación antedicha de factores.

Esta propiedad nos permite demostrar el teorema siguiente:

2.° *El m. c. d. de varios números descompuestos en sus factores primos, se obtiene haciendo el producto,* D, *de los factores primos comunes a todos ellos, tomando cada uno con su menor exponente.*

En efecto, otro divisor común mayor que el obtenido *D*, según el enunciado, tendrá algún factor más, o el exponente de alguno de sus factores primos mayor, o ambas cosas a la vez, o en lugar de un factor primo tiene otro mayor, y en todos estos casos no será divisor de todos los números.

3.° *El m. c. m. de varios números descompuestos en sus factores primos, se obtiene haciendo el producto,* M, *de todos los factores comunes y no comunes, tomando cada uno con su mayor exponente.*

Efectivamente, otro múltiplo común, para ser menor que *M*, debería tener algún factor primo menos que él, y de tenerlos todos, alguno de ellos con exponente menor o en lugar de un factor primo tener otro menor. En estos casos no podría ser múltiplo común.

EJEMPLO: Sean los números

$$4.200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7, \qquad 1.764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \qquad \text{y} \qquad 1.350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$\text{m. c. d. } (4.200, 1.764, 1.350) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{m. c. m. } (4.200, 1.764, 1.350) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 264.600$$

11. Obtención de todos los divisores comunes de varios números: su número. — Se ha visto que los divisores comunes de varios números son todos y nada más que los divisores de su m. c. d. El problema se reduce, pues, a hallar los divisores de un número, y lo vamos a intentar.

Empecemos por calcular su número, razonando de la siguiente manera:

Supongamos el número descompuesto en sus factores primos:

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots n^{\delta}$$

Son divisores de A, el 1, a, a^2, a^3, a^4, ... a^{α}; total $\alpha + 1$, más los que resultan de multiplicar los anteriores, sucesivamente, por b, b^2, b^3, ... b^{β}. Así salen

$$(\alpha+1)\beta + (\alpha+1) = (\alpha+1)(\beta+1) \text{ divisores,}$$

más los que obtendremos al multiplicar cada uno de los anteriores sucesivamente por c, c^2, c^3, ... c^{γ}. Así, en total, resultan:

$$(\alpha+1)(\beta+1) + (\alpha+1)(\beta+1)\gamma = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

y siguiendo tendremos que el número de divisores de A, diferentes, incluyendo al 1 y A, sería

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\delta+1)$$

Este razonamiento nos da la regla para obtenerlos, que será: *Pongamos en una fila la unidad seguida de las sucesivas potencias de* a *hasta* a^{α}.

Debajo se colocan los correspondientes productos por b; en otras filas, los productos por b^2, b^3, ... hasta b^{β}.

Debajo, y en filas sucesivas, los correspondientes productos de las filas anteriores por c, c^2, c^3, ... hasta c , continuando así hasta agotar todos los números.

EJEMPLO: $21.000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Pongamos	1	2	4	8
Productos por 3	3	6	12	24
Productos por 5. — 1.ª Fila	5	10	20	40
2.ª Fila	15	30	60	120
Productos por 25. — 1.ª Fila	25	50	100	200
2.ª Fila	75	150	300	600
Productos por 125. — 1.ª Fila	125	250	500	1.000
2.ª Fila	375	750	1.500	3.000
Productos por 7. — 1.ª Fila	7	14	28	56
2.ª Fila	21	42	84	168
3.ª Fila	35	70	140	280
4.ª Fila	105	210	520	840
5.ª Fila	175	350	700	1.400
6.ª Fila	525	1.050	2.100	4.200
7.ª Fila	875	1.750	3.500	7.000
8.ª Fila	2.625	5.250	10.500	21.000

12. Restos potenciales de 10 respecto a un número n. — Llamamos restos potenciales de 10 respecto a otro número n, llamado módulo, a los restos que resultan de dividir por n, las potencias sucesivas de 10, o sea, 1, 10, 10^2, 10^3, ... 10^h, 10^{h+1} ...

Observemos que si r es el resto de dividir 10^h por n, será $10^h = nq + r$, y por tanto $10^{h+1} = 10nq + 10r$. Es decir, que dividir 10^{h+1} por n es lo mismo que dividir el segundo miembro por el mismo número, pero el primer sumando es múltiplo de n, luego el resto de esta división, si lo tiene, es el mismo que dé al dividir $10r$ por n.

Esto nos permite enunciar la siguiente regla para hallar los sucesivos restos potenciales de 10 con respecto a n. El primer resto es 1; el segundo resto, r, se halla dividiendo $1 \cdot 10$ entre n; el tercero se halla dividiendo $10r$ entre n. Y así, el resto de una potencia cualquiera de 10 se halla multiplicando el resto de la potencia anterior por 10 y dividiendo el producto por n.

EJEMPLO: Hallemos los restos potenciales de 10 respecto de 7:

	$10 \mid 7$	$30 \mid 7$	$20 \mid 7$	$60 \mid 7$	$40 \mid 7$
	$3 \quad 1$	$2 \quad 4$	$6 \quad 2$	$4 \quad 8$	$5 \quad 5$
Restos:	3	2	6	4	5

13. Teorema fundamental de la divisibilidad. — *La condición necesaria y suficiente para que un número*

$$A = k \ldots dcba$$

sea divisible por n, es que lo sea la suma de los productos de las cifras a, b, c, d, ... k, por los restos respectivos de las potencias 10^0, 10, 10^2, 10^3, ... 10^h respecto a n.

En efecto, si al dividir las citadas potencias de 10 por n, obtengo sucesivamente restos 1, r_1, r_2, r_3, ... r_h, puedo poner:

$$10 = nq_1 + r_1, \quad 10^2 = q_2 n + r_2, \quad 10^3 = nq_3 + r_3, \quad \ldots \quad 10^h = nq_h + r_h;$$

pero el número A se puede poner:

$$A = a + 10b + 10^2c + 10^3d + \ldots + 10^h k$$

luego,

$$A = a + nbq_1 + br_1 + ncq_2 + cr_2 + ndq_3 + dr_3 + \ldots + nkq_h + kr_h$$

lo que equivale a

$$A = \text{múltiplo de } n + (a + br_1 + cr_2 + dr_3 + \ldots + kr_h)$$

Igualdad que nos dice que:

Si el paréntesis es múltiplo de n, también lo es A, y *recíprocamente.*

EJEMPLO: Investiguemos si 43.486 es divisible por 13.

		$10 \mid 13$	$100 \mid 13$	$90 \mid 13$	$120 \mid 13$	$30 \mid 13$
		$10 \quad 0$	$9 \quad 7$	$12 \quad 6$	$3 \quad 9$	$4 \quad 2$
Restos:	1	10	9	12	3	4

Suma: $6 + 10 \cdot 8 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 170$; pero $170 \mid 13$, $40 \quad 13$, 1

luego 43.486 no es divisible por 13, ya que tiene por resto 1.

14. Aplicación a la divisibilidad de 2, 3, 4, 5, 7, 11.

Restos potenciales de 10 respecto a 2 son 1, 0, 0...

RECLA: *Un número será divisible por 2, si lo es la cifra de sus unidades, es decir, si termina en cifra par.*

Restos potenciales de 10 con respecto a 3 son 1, 1, 1, 1...

REGLA: *Un número es divisible por* 3, *cuando lo es la suma del valor absoluto de sus cifras.*

Restos potenciales de 10 con respecto a 4 son: 1, 2, 0, 0...

REGLA: *Un número será divisible por* 4, *cuando lo sea la suma de sus unidades y el doble de sus decenas.*

Restos potenciales de 10 con respecto a 5 son 1, 0, 0...

REGLA: *Un número es divisible por* 5, *cuando lo sea la cifra de sus unidades, es decir, cuando termine en* 0 *o en* 5.

Restos potenciales de 10 con respecto a 7 son: 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, ...

REGLA: *Un número es divisible por* 7, *si lo es la suma de sus unidades, más el triple de sus decenas, más el doble de sus centenas, más el séxtuplo de sus millares, etc.*

Restos potenciales de 10 con respecto a 11 son: 1, 10, 1, 10, 1, ...

Que podemos poner así: 1, -1, 1, -1, 1.

Por tanto, A será divisible por 11 si:

$$a + 10b + c + 10d + \ldots = a + 11b - b + c + 11d - d + \ldots =$$

$$= \text{Múltiplo de } 11 + a - b + c - d \ldots = \dot{11} + [(a+c+\ldots) - (b+d+\ldots)]$$

$$= \text{Múltiplo de } 11 - (-a+b-c+d-\ldots) = \dot{11} - [(b+d+\ldots) - (a+c+\ldots)]$$

De aquí se deduce la regla:

Un número es divisible por 11, *si lo es la diferencia de la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las que ocupan lugares impares, o viceversa.*

Se puede establecer otra regla para la divisibilidad por 4, de la siguiente manera:

Sea $A = k \ldots dcba = a + 10b + 10^2(k \ldots dc) = ba + (k \ldots dc)10^2$

Como 10^2 es múltiplo de 4, para que A lo sea, es suficiente con que lo sea ab.

Es decir, *para que un número sea divisible por* 4, *basta con que lo sea el número formado por las dos últimas cifras.*

10. Concepto de cuerpo

1. Estructura de cuerpo. — *Un conjunto* K *tiene estructura de cuerpo cuando posee dos operaciones internas* $*$ *y* $\square$ *respecto de las cuales* K *es un anillo con unidad y tal que todo elemento de* K *(salvo el elemento neutro de* $*$*), tiene simétrico respecto de* $\square$, es decir,

a) $\forall (a, b) \in K \Longrightarrow \exists\, a * b = c \in K$

b) $\forall (a, b, c) \in K \Longrightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$

c) $\forall (a, b) \in K \Longrightarrow a * b = b * a$

d) $\exists\, 0 \in K$ tal que $0 * a = a * 0 = a$ si $a \in K$

e) $\forall\, a \in K \Longrightarrow \exists\, a' \in K$ tal que $a * a' = a' * a = 0$

f) $\forall (a, b) \in K \Longrightarrow \exists\, a \square b = d \in K$

g) $\forall (a, b, c) \in K \Longrightarrow a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$

h) $\exists\, e \in K$ tal que $e \square a = a \square e = a$ si $a \in K$

i) $a \square (b * c) = (a \square b) * (a \square c)$; $\qquad (b * c) \square a = (b \square a) * (c \square a)$

y además si $K' = K - \{0\}$

a') $\forall\, a \in K' \Longrightarrow \exists\, a^{-1} \in K'$ tal que $a \square a^{-1} = a^{-1} \square a = e$

K' es el conjunto K menos el elemento neutro respecto a $*$.

Si $\square$ es conmutativa, el cuerpo se llama *conmutativo*. Los ejemplos más notables son los números Q, R y C.

2. Subcuerpo. — *Dado un cuerpo* K *respecto de las operaciones* $*$, $\square$ *si* K_1 *es un subconjunto de* K *que respecto* $*$ *y* $\square$ *también tiene estructura de cuerpo, entonces* K_1 *es llamado subcuerpo de* K.

Por ejemplo, Q es subcuerpo de R y éste a su vez lo es de C.

3. Propiedades generales de un cuerpo. — La estructura de cuerpo, por comprender a los grupos y anillos, goza de todas las propiedades de éstos y además de otras específicas, que seguidamente expondremos. Las operaciones internas que consideraremos en el cuerpo, son la suma y la multiplicación, exclusivamente.

1.ª *Nulidad del producto.* El valor del producto $0 \times b$ no es posible hallarlo con las leyes internas de grupo, pero sí, como se vio, mediante la propiedad distributiva de los anillos. Así, en un anillo, se puede poner

$$ab = (a+0)\,b = ab + 0 \cdot b \Longrightarrow 0 \cdot b = 0$$

Pero en el anillo no se resuelve el caso inverso $ab = 0$, pues existen anillos en los que es posible la igualdad anterior, siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

En cambio, tratándose de un cuerpo, no sucede así, pues si a y $b \in K'$, será

$$\frac{1}{a} \text{ y } \frac{1}{b} \in K' \Longrightarrow \frac{1}{ab} \in K' \Longrightarrow ab \in K', \text{ y por consiguiente, } ab \neq 0$$

Resulta pues que en un cuerpo, para que un producto sea nulo, es necesario que al menos uno de los factores sea nulo.

2.ª *La propiedad distributiva de la multiplicación se extiende a la división.* En efecto, sean $(a, b \text{ y } c) \in K'$ y c^{-1} el simétrico de c respecto a la multiplicación. Se tiene evidentemente,

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\,c^{-1} = ac^{-1} + bc^{-1} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

3.ª *Opuesto de un elemento en el cuerpo.* Existe el 1, elemento neutro para la multiplicación, luego

$$a \in K', \qquad a = 1 \times a, \qquad -a = (-1) \times a$$

Es decir, se obtiene el opuesto de un elemento dado a, multiplicándolo por -1.

4.ª *La ecuación* ax = b *en un cuerpo, siendo* a *y* b ∈ K, *tiene solución; así:*

a) $a \neq 0$, la existencia de la operación inversa de la multiplicación, implica la solución

$$x = \frac{b}{a}$$

b) $a = 0$ y $b \neq 0$, no hay solución.

$a = 0$ y $b = 0$, cualquier elemento de K es solución.

11. Números racionales Q

1. **Definiciones.** — Estudiados los números naturales, con los que definimos las operaciones fundamentales, nos vimos precisados a ampliar el campo de números, admitiendo la existencia de enteros, positivos y negativos. Con ellos pudimos definir la sustracción en todos los casos, sin limitación, pero no así la división exacta, la cual no es posible en este campo, más que en el caso de ser el dividendo múltiplo del divisor.

Por otra parte, al pretender hallar la medida de las diversas magnitudes, segmentos, por ejemplo, la cantidad que deseamos medir, muy a menudo no contiene un número exacto de veces a la unidad empleada y por lo tanto, no habría posibilidad en estos casos de expresar exactamente su medida.

Para solventar estas dificultades, se ensancha nuevamente el campo de los números, creando otros llamados *números racionales,* cuya definición vamos a precisar, más adelante.

Consideremos el conjunto

$$Z \times Z', \quad \text{siendo} \quad Z' = Z - \{0\} \qquad \text{[11-a]}$$

Cada elemento o número será de la forma

$$(a,\ b) \quad \text{o más bien} \quad \frac{a}{b}$$

denominado *fracción* o *quebrado,* siendo *a* el *numerador* y *b* el *denominador,* y ambos conjuntamente, *términos de la fracción.*

En lo que sigue utilizaremos preferentemente la segunda notación, en la que a y $b \in Z$, van afectadas de su respectivo signo y además, según [11-a], $b \neq 0$. Esto sentado, *denominaremos fracción a cada uno de los elementos del conjunto* $Z \times Z'$, *antes definido, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:* 1.ª *Cada elemento se considera afectado del signo más si* a *y* b *tienen el mismo signo, y del signo menos, en caso contrario.*

2.ª Dos elementos así formados

$$\frac{a}{b} \qquad \text{y} \qquad \frac{a'}{b'}$$

se dicen equivalentes, si

$$ab' = ba' \qquad \text{[11-b]}$$

Escribiremos que dos fracciones son equivalentes con la siguiente notación:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

que leeremos $\frac{a}{b}$ es igual o equivalente a $\frac{a'}{b'}$.

Si a esto añadimos el convenio de que

$$\frac{a}{1} = a \qquad \text{[11-c]}$$

podremos considerar los números enteros como un caso particular de las fracciones.

La definición dada de equivalencia satisface a las propiedades siguientes:

Reflexiva, pues

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Longrightarrow ab = ba$$

Simétrica, pues

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longrightarrow ab' = ba' \Longrightarrow a'b = b'a \Longrightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

Transitiva, pues

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \Longrightarrow ab' = ba' \\ \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''} \Longrightarrow a'b'' = b'a'' \end{array}\right\} \Longrightarrow ab'' = ba'' \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$$

2. Clases de equivalencia. Números racionales. Simplificación de fracciones. — *Las fracciones que tienen sus términos equimúltiplos, son equivalentes,* pues

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} \Longrightarrow abn = ban \qquad \text{[11-d]}$$

Ahora bien, el conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí, se dice que forman una *clase de equivalencia,* así la forman

$$\frac{10}{20}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{-4}{-8}, \frac{-6}{-12}, \frac{1}{2}, \ldots \qquad \text{[11-e]}$$

Antes se ha dicho que los números enteros se les puede considerar como un caso particular de las fracciones, y por tanto tendrán su clase representativa. Así la clase

$$\frac{55}{11}, \frac{10}{2}, \frac{-15}{-3}, \frac{5}{1}, \cdots \frac{5k}{k}, \cdots$$

representan o definen al número 5. De igual manera existe una clase que define al cero,

$$\frac{0}{3}, \frac{0}{-8}, \frac{0}{8}, \frac{0}{20}, \cdots, \frac{0}{k}, \cdots, \frac{0}{1}, \cdots$$

Pues bien, *las clases de equivalencia de fracciones así consideradas, se denominan números racionales, cuyo conjunto designaremos por* Q. En adelante tomaremos como sinónimos: números racionales y clases de equivalencia de fracciones.

Cuando una fracción tiene sus términos primos entre sí, se dice que es *irreducible y se llama forma canónica de la clase o también del número racional definido por dicha clase.*

Así, en [11-e], la forma canónica o fracción irreducible de la clase escrita es $\frac{1}{2}$.

Según [11-d], si se dividen los dos términos de la fracción por un mismo *número entero,* se obtiene otra fracción equivalente a la dada; a esto se denomina *simplificar fracciones.* Así podremos escribir:

$$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Como se ve, la simplificación hace que representemos el número racional mediante una fracción de términos más sencillos que la dada.

Para hallar la forma canónica de una clase, basta dividir los dos términos de una cualquiera de las fracciones que la componen, por el m. c. d. de los mismos.

Así, siendo m. c. d. (36, 126) = 18, se tiene

$$\frac{36}{126} = \frac{2 \cdot 18}{7 \cdot 18} = \frac{2}{7}$$

Obsérvese que *si una fracción cualquiera, es equivalente a otra irreducible, aquélla tiene sus términos equimúltiplos de ésta,* pues si a y b son primos, se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longrightarrow ab' = ba'$$

pero b divide al primer miembro y no divide a a, luego divide a b', de modo que

$$b' = b \cdot n \Longrightarrow ab' = abn = ba' \Longrightarrow a' = an$$

3. Reducción de fracciones a un común denominador. — La propiedad enunciada en [11-d], nos permite expresar dos o más fracciones por otras equivalentes que tengan el mismo denominador. Así

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \Longrightarrow \frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}$$

A esta operación se denomina *reducir fracciones a común denominador.*

Se consigue también reducir fracciones a común denominador, multiplicando los dos términos de cada una por el cociente de dividir por cada denominador, el m. c. m. de los denominadores, con lo que dicho m. c. m. será el denominador común de las fracciones equivalentes. Si las fracciones dadas son irreducibles, el denominador común hallado será el menor posible, pues otro cualquiera ha de ser múltiplo común de los denominadores y por consiguiente de su m. c. m.

Sean las fracciones

$$\frac{13}{12}, \frac{-5}{8}, \frac{7}{30}, \text{ puesto que m. c. m. } (12, 8, 30) = 120$$

$$\frac{13}{12}, \frac{-5}{8}, \frac{7}{30} = \frac{130}{120}, -\frac{75}{120}, \frac{28}{120}$$

Pero si se trata de

$$\frac{13}{12}, -\frac{10}{16}, \frac{7}{30}; \text{ m. c. m. } (12, 16, 30) = 240$$

$$\frac{13}{12}, -\frac{10}{16}, \frac{7}{30} = \frac{260}{240}, -\frac{150}{240}, \frac{56}{240}$$

que como se ve, simplificando por 2 obtendremos las anteriores.

4. Suma y producto de fracciones. — Sean las fracciones

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}$$

respectivamente pertenecientes a las clases α y β, *denominaremos suma de esas fracciones a la fracción*

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

que supondremos pertenece a la clase γ.

Esto se indica así

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

De la misma manera *se llama producto de esas mismas fracciones a la fracción*

$$\frac{ac}{bd}$$

que supondremos pertenece a la clase δ. Y se indica así

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Vamos a probar que la clase γ es la misma, cualesquiera que sea la fracción tomada de α y la tomada de β. En efecto, siendo

$$\frac{a'}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{c'}{d'}$$

las formas canónicas de α y β, se tiene $a = a'n$, $b = b'n$, $c = c'k$ y $d = d'k$. Por consiguiente,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'nd'k + b'nc'k}{b'nd'k} = \frac{(a'd' + b'c')nk}{b'd'nk} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

que nos prueba que cualesquiera que sea la fracción tomada en α y la tomada en β, al sumarlas, siempre obtenemos una fracción perteneciente a la clase de

$$\frac{a'd' + b'c'}{b'c'}$$

En la práctica, *para sumar fracciones, se reducen a común denominador y se escribe una fracción que tenga por numerador la suma de los numeradores y por denominador, el denominador común.*

Examinando el producto de fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a'nc'k}{b'nd'k} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

podremos afirmar de forma semejante a la dicho en la suma.

El producto de dos fracciones elegidas una de cada clase α y β, da otra fracción de una clase independiente de las fracciones representativas que hayamos tomado de cada clase.

Por consiguiente, *para multiplicar dos fracciones se escribe otra fracción que tenga por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el producto de los denominadores de las fracciones factores.*

Para sumar o multiplicar varias fracciones, se opera con las dos primeras, y el resultado con la tercera y así sucesivamente, hasta llegar a la última.

5. Adición y multiplicación de números racionales. — *Llamamos suma de números racionales, definidos respectivamente por las clases α y β, a otro número racional, que define la clase que se obtiene al sumar una fracción cualquiera de α con otra culquiera de β.*

Así, si α es definido por la clase

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{-4}{-12} \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{20}{60}, \ \ldots$$

y β por

$$\frac{2}{5} \quad \frac{-14}{-35}, \quad \frac{6}{15}, \quad \frac{10}{25}, \ \ldots$$

la suma es definida por una cualquiera de las sumas

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right), \ \left(\frac{20}{60}+\frac{-14}{-35}\right), \ \ldots$$

Una clase de equivalencia, y por consiguiente un número racional, se puede representar por una cualquiera de las fracciones pertenecientes a aquélla. Así el número racional α, o el número definido por la clase α, se puede representar por una cualquiera de las fracciones que lo componen, por ejemplo, por

$$\frac{2}{6}$$

y si la clase β o número racional β, se le representa por

$$\frac{6}{15}$$

el número racional suma de los dos $\alpha + \beta$ vendría definido por la clase a que pertenece

$$\frac{2}{6}+\frac{6}{15}=\frac{30+36}{90}=\frac{66}{90}$$

Del mismo modo, *llamamos producto de dos números racionales, definidos por las clases α y β, a otro número racional, que define la clase que se obtiene al multiplicar una fracción cualquiera de α, por otra cualquiera de β.*

Haciendo las mismas consideraciones que antes y representando las clases por una de las fracciones, el producto de los dos números racionales podrá estar representado por el producto de las citadas fracciones. Así, el producto de los números racionales α y β podrá ser representado, por ejemplo, por

$$\frac{-4}{-12}\times\frac{10}{25}=\frac{-40}{-300}=\frac{40}{300}$$

Esto nos autoriza a decir que un número racional se puede representar por muchas fracciones, todas ellas equivalentes, y que las propiedades de la suma y producto de fracciones serán las propiedades de los números racionales.

6. Propiedades de la suma de números racionales. — La suma de fracciones goza de las siguientes propiedades, que a la vez lo son de los números racionales que ellas representan:

Uniforme, pues si tenemos las siguientes fracciones, que sumaremos m. a m.

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{a'}{b'}\\ \frac{c}{d}&=\frac{c'}{d'}\end{aligned}\right\}\ \text{cuyas formas canónicas son}\ \left\{\begin{aligned}&\frac{a_1}{b_1},\ \text{siendo}\ \begin{aligned}a&=a_1n;\quad a'=a_1n_1\\ b&=b_1n;\quad b'=b_1n_1\end{aligned}\\ &\frac{c_1}{d_1},\ \text{siendo}\ \begin{aligned}c&=c_1k;\quad c'=c_1k_1\\ d&=d_1k;\quad d'=d_1k_1\end{aligned}\end{aligned}\right.$$

Pero

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{d}=\frac{a_1n}{b_1n}+\frac{c_1k}{d_1k}=\frac{a_1nd_1k+b_1nc_1k}{b_1nd_1k}=$$

$$=\frac{nk(a_1d_1+b_1c_1)}{nkb_1d_1}=\frac{a_1d_1+b_1c_1}{b_1d_1}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}$$

$$\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}=\frac{a_1n_1}{b_1n_1}+\frac{c_1k_1}{d_1k_1}=\frac{a_1n_1d_1k_1+b_1n_1c_1k_1}{b_1n_1d_1k_1}=$$

$$=\frac{n_1k_1(a_1d_1+b_1c_1)}{n_1k_1b_1d_1}=\frac{a_1d_1+b_1c_1}{b_1d_1}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}$$

Por consiguiente

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

La suma de números racionales es uniforme, pues el resultado es independiente de la fracción representativa de las clases a que pertenecen los sumandos.

Asociativa

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+dcf+bde}{bdf}=$$

$$=\frac{adf+(bcf+bde)}{bdf}=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf+bde}{bdf}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

La suma de números racionales es asociativa.

Conmutativa

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}=\frac{bde+bcf+adf}{bdf}=$$

$$=\frac{bde}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{adf}{bdf}=\frac{e}{f}+\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Existencia del elemento neutro respecto a la suma. — La clase siguiente representa al cero, o sea, al número racional cero,

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{b}, \frac{0}{m}, \cdots$$

En efecto,

$$\frac{b}{d} + \frac{0}{m} = \frac{mb + d0}{dm} = \frac{mb}{dm} = \frac{b}{d}$$

Existe siempre un número racional simétrico de otro dado, respecto a la suma, y ambos se llaman opuestos.

En efecto,

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{-b} = \frac{-ab + ba}{-bb} = \frac{0}{-bb} = 0;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb} = 0$$

La fracción $\frac{a}{-b}$ y $\frac{-a}{b}$ se escribirá $-\frac{a}{b}$ y será negativa si a y $b \in N$.

Los números racionales forman un grupo aditivo conmutativo.

7. Propiedades del producto de números racionales.

Uniforme, pues si tenemos las siguientes fracciones que multiplicamos m. a m.,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \\ \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \end{array}\right\} \text{ cuyas formas canónicas son } \left\{\begin{array}{ll} \frac{a_1}{b_1}, \text{ siendo} & a = a_1 n; \quad a' = a_1 n_1 \\ & b = b_1 n; \quad b' = b_1 n_1 \\ \frac{c_1}{d_1}, \text{ siendo} & c = c_1 k; \quad c' = c_1 k_1 \\ & d = d_1 k; \quad d' = d_1 k_1 \end{array}\right.$$

Pero

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a_1 n c_1 n}{b_1 n d_1 n} = \frac{a_1 c_1}{b_1 d_1} \\ \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} = \frac{a'c'}{b'd'} = \frac{a_1 n_1 c_1 k_1}{b_1 n_1 d_1 k_1} = \frac{a_1 c_1}{b_1 d_1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

Luego la multiplicación de números racionales es uniforme.

Asociativa, pues

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf} = \frac{a(ce)}{b(df)} = \frac{a}{b} \frac{ce}{df} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

La multiplicación de números racionales es asociativa.

Conmutativa, pues

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}=\frac{eagc}{fbhd}=\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{g}{h}\cdot\frac{c}{d}$$

La multiplicación de números racionales es conmutativa.

Existencia del elemento neutro respecto a la multiplicación. — El elemento $\frac{1}{1}=\frac{m}{m}$ es el elemento neutro. En efecto,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{m}=\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$$

Existe un elemento simétrico de un número racional dado, respecto a la multiplicación y ambos se llaman recíprocos. En efecto, dada la fracción $\frac{a}{b}$, su simétrica es $\frac{b}{a}$, pues

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$$

que es el elemento neutro, según se dijo arriba.

Luego los números racionales forman grupo multiplicativo conmutativo.

8. Sustracción y división. — Sean a y $b\in Q$. *Se llama diferencia entre* a, *minuendo, y* b, *sustraendo, a otro número* d ∈ Q, *que sumado con el sustraendo nos da el minuendo.* Se escribe indistintamente

$$a=b+d \quad \text{o bien} \quad a-b=d$$

Añadamos a los dos miembros de la primera igualdad $-b$, simétrico u opuesto al sustraendo y tendremos

$$a+(-b)=b+d+(-b)=b+(-b)+d=d$$

Por consiguiente, se obtiene la diferencia d, *entre dos números racionales, sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.*

Al ser la suma uniforme, también lo es la diferencia.

De igual manera, denominamos cociente de dos números a y $b\in Q$, siendo a el dividendo y b el divisor, a otro número $c\in Q$, que multiplicado por el divisor, nos da el dividendo. Se escribirá indistintamente así:

$$a=b\cdot c \quad \text{o bien} \quad a:b=c \quad \text{o también} \quad \frac{a}{b}=c$$

Multipliquemos a los dos miembros de la primera igualdad por $\frac{1}{b}$ recíproco del divisor y se tiene:

$$a \cdot \frac{1}{b} = b \cdot c \cdot \frac{1}{b} = b \cdot \frac{1}{b} \cdot c = \frac{b}{1} \cdot \frac{1}{b} \cdot c = \frac{b}{b} \cdot c = c$$

Luego *el cociente de dos números en* Q, *existe siempre y se obtiene multiplicando el dividendo por el recíproco del divisor.*

9. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. Cuerpo Q de los números racionales. — Sea el producto de los números pertenecientes a Q:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{bd} \cdot \frac{m}{n} = \frac{(ad+bc)\,m}{bdn} = \frac{adm + bcm}{bdn} =$$

$$= \frac{adm}{bdn} + \frac{bcm}{bdn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$$

que nos prueba que *en* Q, *la multiplicación es distributiva respecto a la suma,* pues las operaciones arriba escritas son valederas para cualesquiera representantes de las clases respectivas de los sumandos y del factor.

Según esto, *Q tiene estructura de cuerpo,* pues

La suma es operación interna

$$\forall\,(a \text{ y } b) \in Q \Longrightarrow \exists\, a + b = c \in Q$$

que es *asociativa*
$$\forall\,(a,\ b \text{ y } c) \in Q \Longrightarrow (a+b) + c = a + (b+c)$$

conmutativa
$$\forall\,(a,\ b) \in Q \Longrightarrow a + b = b + a$$

con elemento neutro
$$a \text{ y } 0 \in Q \Longrightarrow a + 0 = a$$

y *simétrico*
$$a,\ (-a) \in Q \Longrightarrow a + (-a) = 0$$

La multiplicación es operación interna

$$\forall\,(a,\ b) \in Q \Longrightarrow \exists\, a \cdot b = c \in Q$$

que es *asociativa*
$$\forall\,(a,\ b,\ c) \in Q \Longrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

conmutativa
$$\forall\, a,\ b \in Q \Longrightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

con elemento neutro
$$a \text{ y } 1 \in Q \Longrightarrow a \cdot 1 = a$$

y *simétrico*
$$a\left(\frac{1}{a}\right) \in Q \Longrightarrow a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Además, *la multiplicación es distributiva respecto a la suma*

$$\forall\,(a,\ b,\ c,\ m) \in Q \Longrightarrow (a+b+c)\,m = am + bm + cm$$

Por consiguiente, Q *es un cuerpo conmutativo.*

10. Comparación de números racionales. Leyes de monotonía.

1.° Si a y $b \in Q$, se dice que a es mayor que b si la diferencia $a - b$ es positiva y se expresa de esta forma:

$$a > b$$

2.° *Todo número positivo es mayor que cero.* En efecto, si $\frac{a}{b}$ es positivo, se tiene

$$\frac{a}{b} - \frac{0}{b} = \frac{ab - b \cdot 0}{bb} = \frac{a}{b} > 0$$

3.° Es fácil darse cuenta que son válidas para los números racionales las leyes de monotonía de los números enteros, 6-6, y su demostración y enunciado la brindamos al lector.

11. Significación de la fracción y del número racional. — 1.° Si tenemos los dos números a y $b \in Z$, siendo $b \neq 0$, mediante los números racionales se puede expresar el cociente exacto de estos dos números, pues

$$a : b = \frac{a}{b} \qquad\qquad b \cdot \frac{a}{b} = \frac{ab}{b} = a$$

que justifica la igualdad. Lo dicho para la fracción $\frac{a}{b}$ se apuede aplicar a las fracciones de su clase.

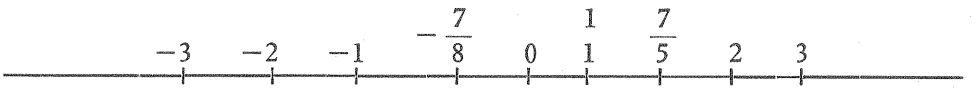
2.° Como consecuencia de lo anterior, una fracción cualquiera de una determinada clase expresa las veces que el numerador contiene al denominador y por consiguiente servirá para expresar la medida de una cantidad representada por el numerador, cuando se toma el denominador como unidad.

3.° Puesto que $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, expresa que dividida la unidad en b partes, tomamos a de ellas.

12. Representación gráfica de los números racionales. Q es siempre divisible. — Si en una recta indefinida tomamos un punto 0 como origen, y consideramos sentido positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda, una vez fijado el segmento unidad, a cualquier número racional le corresponde un punto de la recta.

Así, a los números racionales definidos por las clases $\frac{7}{5}$ y $-\frac{8}{5}$, les corresponden los puntos indicados, cuyas distancias al origen tienen por medidas los mencionados números racionales. Pero no podemos afirmar que a todo punto de la recta le corresponde un número racional. Así, la hipotenusa de un triángulo rec-

tángulo cuyos catetos midan 1 y 2 unidades respectivamente, llevada sobre la recta, señala un punto al que le corresponde por medida $\sqrt{5}$, que no es ningún número racional.



Esta representación, a primera vista, nos sugiere la idea de que los números racionales varían por saltos, no obstante, nos convenceremos de lo contrario observando que siempre existe entre dos números racionales otro número racional comprendido entre ellos. Así, dados los números racionales $a > b$, existe otro $\frac{a+b}{2}$, que es menor que a, pues

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$$

y mayor que b, pues

$$\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} > 0$$

Pero entre a y $\frac{a+b}{2}$ existe otro número racional; podemos afirmar que entre a y b existen infinitos números racionales. Esto es lo mismo que decir que Q es siempre divisible.

12. Sistemas de ecuaciones lineales. Equivalencia

1. Sistemas de ecuaciones. Definiciones. — *Ecuación es una igualdad que se transforma en identidad o igualdad numérica tan sólo para ciertos valores atribuidos a sus letras o incógnitas.* Estos valores o números que satisfacen a la ecuación, es decir, que colocados en lugar de las incógnitas transforman la ecuación en identidad, se llaman *soluciones.*

Un conjunto de ecuaciones que se han de satisfacer simultáneamente, para los valores de sus letras o incógnitas, se dice que forman *un sistema.* Así:

$$\begin{aligned} 3x + 8y - z &= 29 \\ 5x - 2y + 4z &= 8 \\ x - z &= 1 \end{aligned} \qquad [12\text{-a}]$$

forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que se satisfacen para $x = 2$, $y = 3$ y $z = 1$.

Cuando las ecuaciones son de primer grado, se dice que son *lineales,* y sistemas lineales son los únicos que se estudiarán en esta lección.

Un sistema de ecuaciones se llama *compatible* cuando tiene solución, e *incompatible* o *imposible,* en caso contrario.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 15 &= 0 \\ 5x + 2y - 16 &= 0 \\ x + 8y - 26 &= 0 \end{aligned}$$

es compatible, pues tiene por solución $x = 2$ e $y = 3$.

Pero el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 15 &= 0 \\ 5x + 2y - 16 &= 0 \\ x + 8y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

es incompatible, pues no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones lineales es *determinado* cuando tiene una sola solución. Ejemplo, el primero de los anteriores.

Y es *indeterminado,* cuando tiene infinitas soluciones.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 2z &= 7 \\ 5x + 2y - 3z &= -8 \end{aligned}$$

tiene por soluciones, los valores que ocupan el mismo orden en

$$x = \frac{26}{41}, \frac{43}{41}, \frac{60}{41}, \ldots \qquad y = \frac{17}{41}, \frac{36}{41}, \frac{55}{41}, \ldots \qquad z = 4, 5, 6, \ldots$$

Un sistema de ecuaciones lineales se dice *homogéneo* cuando sus ecuaciones no tienen término independiente, así,

$$\begin{aligned} x - y + 4z &= 0 \\ 2x + 7y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

es un sistema homogéneo.

2. Sistemas equivalentes. — *Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.*

Si toda solución de un sistema de ecuaciones satisface a otra ecuación, decimos que esta última es *consecuencia* de aquéllas. Esto quiere decir que se ha obtenido la última ecuación, sumando, restando o multiplicando, miembro a miembro dos o más ecuaciones del sistema, después de haber multiplicado cada una por números independientes de las incógnitas. Así, en

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ -7x + 12y &= -4 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned} \qquad [12\text{-b}]$$

resulta que las dos primeras tienen la solución $x = 4$, $y = 2$, solución que a su vez satisface a la tercera. Pero observamos que ésta es el resultado de sumar la primera multiplicada por 3, a la segunda.

En este caso se dice que la ecuación obtenida, la tercera, es una *combinación lineal* de las otras dos, y podemos decir:

Una ecuación es combinación lineal de otras varias, si se obtiene como resultado de sumar o restar, m. a m. éstas, previamente multiplicadas por números independientes de las incógnitas.

Por consiguiente, una ecuación combinación lineal de otras varias, es consecuencia de ellas.

En efecto, todo sistema de valores o números que satisfaga a las dos primeras ecuaciones de [12-b] satisfará a cualquiera de esas ecuaciones, previamente multiplicados sus dos miembros por un número no dependiente de las incógnitas y consiguientemente, también el resultado de sumar o restar m. a m. varias de esas ecuaciones.

Si en un sistema se observa que una ecuación es consecuencia de otras, se puede eliminar esa ecuación, sin alterar la equivalencia del sistema.

Por otra parte, si una ecuación es consecuencia de otras y no contiene una incógnita que en aquéllas figura, se dice que la incógnita ha sido *eliminada.* Así, en

$$\begin{aligned} 7x + 2y &= 14 \\ 3x - 6y &= 5 \end{aligned}$$

se elimina y, quedando $\dfrac{14 - 7x}{2} = \dfrac{3x - 5}{6}$

Cuando en un sistema hayamos eliminado todas las incógnitas menos una, podremos resolver la ecuación obtenida, con lo que hallaremos los valores de esa incógnita.

Eliminar todas las incógnitas de un sistema lineal, cuyos coeficientes son $a, b, c, \ldots l \in Q$, es hallar una relación $F(a, b, c, \ldots l) = 0$, entre estos coeficientes, a la que han de satisfacer éstos, para que el sistema tenga solución.

Cuando la anulación de F no sólo es necesaria, sino también suficiente, para la compatibilidad del sisema, entonces $F(a, b, c, \ldots l) = 0$, se llama *resultado del sistema.*

3. Teoremas fundamentales de equivalencia de sistemas.

Teorema 1.°: *Si en un sistema de ecuaciones lineales sustituimos una ecuación por el resultado de sumar esa ecuación multiplicada por un número, con otras del mismo sistema, cada una multiplicada o no por un número, el nuevo sistema es equivalente al primero.*

En efecto, sea el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= K_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= K_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= K_3 \end{aligned} \qquad \text{[12-c]}$$

que tiene la solución: $x = a, y = b, z = c.$

Si multiplicamos la primera ecuación por n, la segunda por m, y la tercera por p, siendo $n, m, p \in Q$, las sumamos, y con el resultado sustituimos la primera ecuación, tendremos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned} n(a_1x+b_1y+c_1z) + m(a_2x+b_2y+c_2z) + p(a_3x+b_3y+c_3z) &= K_1n + K_2m + K_3p \\ a_2x + b_2y + c_2z &= K_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= K_3 \end{aligned} \qquad \text{[12-d]}$$

que es equivalente al dado. En efecto:

Es evidente que la solución $x = a, y = b, z = c,$ satisface a la segunda y tercera ecuación; pero también satisface a la primera, pues el primer paréntesis para esos valores de las incógnitas, se hace igual a K_1, el segundo, a K_2, y el tercero, a K_3, con lo que se reduce a

$$nK_1 + mK_2 + pK_3 = nK_1 + mK_2 + pK_3$$

es decir, una identidad, quedando demostrado el teorema.

Recíprocamente, toda solución $x = a'$, $y = b'$ y $z = c'$, de [12-d], es solución de [12-c], pues satisface a la segunda y tercera ecuación del primer sistema, y por tanto convierte a

$$(a_2x+b_2y+c_2z) \quad \text{en } K_2 \qquad \text{y a} \qquad (a_3x+b_3y+c_3z) \quad \text{en } K_3$$

o lo que es lo mismo, a $a_1x + b_1y + c_1z$ en K_1.

EJEMPLO: El sistema

$$\begin{aligned} 5x - 4y + 7z &= 26 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x - 7y + 8z &= 17 \end{aligned}$$

tiene por raíces $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

Si resto de la primera ecuación multiplicada por 5, la tercera multiplicada por 3, y el resultado lo pongo en el lugar de la primera, tendremos:

$$\begin{aligned} 16x + y + 11z &= 79 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x - 7y + 8z &= 17 \end{aligned}$$

que también se satisface para $x = 2$, $y = 3$, y $z = 4$.

Teorema 2.°: *Un sistema de ecuaciones se transforma en otro equivalente si una de sus ecuaciones se reemplaza por otra, obtenida al multiplicar m. a m. aquélla por otra cualquiera del sistema, o bien, dividiéndola, pero siempre con la condición de que ninguna solución del sistema anule a la vez a los dos miembros de la ecuación, multiplicador o divisor.*

En efecto, sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned} \qquad \text{será equivalente a} \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ (a_1x+b_1y+c_1z)(a_2x+b_2y+c_2z) &= k_2k_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned}$$

En efecto, toda solución del primer sistema es solución del segundo; es evidente para la primera y tercera ecuación y en la segunda transforma el primer paréntesis en k_1 y el segundo en k_2, y por consiguiente su producto es k_1k_2.

Recíprocamente: Toda solución $x = a$, $y = b$, y $z = c$ del segundo sistema, es solución del primero, pues es evidente para la primera y tercera ecuación, y por consiguiente el primer paréntesis lo transforma en k_1, por lo que el segundo paréntesis lo transforma en $a_2a + b_2b + c_2c = k_2$.

Por tanto, ambos sistemas son equivalentes.

Si la solución a, b y c, anulara los dos miembros del multiplicador $a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ pudiera satisfacer a la primera y tercera ecuación del sistema segundo, sin satisfacer a $a_2x + b_2y + c_2z = k_2$. En este caso no serían equivalentes ambos sistemas.

13. Determinantes de segundo y tercer orden

1. Matrices cuadradas: Definiciones. — *Llamaremos matriz cuadrada de orden* n, *a* n *filas de* n *números cada fila, colocadas de modo que se correspondan en columna los primeros números, los segundos, ... los enésimos.*

La matriz así definida, consta de n^2 números, llamados elementos, y de n filas y n columnas, llamadas genéricamente líneas.

Por ejemplo:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

La notación empleada en el ejemplo, nos permite en cada momento saber a qué fila y a qué columna pertenece un elemento dado, ya que el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna. A la diagonal formada por los elementos a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}, se le llama diagonal principal y a la otra se le designa con el nombre de diagonal secundaria.

2. Determinante de segundo orden. — Una matriz cuadrada de segundo orden encerrada entre dos barras verticales

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{o bien} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se denomina *determinante de segundo orden* y es una forma abreviada de expresar la siguiente suma algebraica

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El primer término es la diagonal principal, y el segundo la diagonal secundaria. Cada uno de ellos se denomina *término deducido de la matriz.* La suma algebraica se denomina *desarrollo del determinante.*

EJEMPLO: El determinante que transcribimos a continuación, se desarrolla como sigue:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - (-7) \times 4 = 15 + 28 = 43$$

Es decir, que el valor de los términos de este determinante, o el desarrollo del mismo, vale 43.

3. Determinante de tercer orden. — Por lo mismo, una matriz cuadrada de tercer orden y encerrada entre dos barras verticales:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se denomina *determinante de tercer orden* y es una forma abreviada de expresar la siguiente suma algebraica:

[13-a]

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

que se denomina desarrollo del determinante. Cada uno de los sumandos, con su signo se denomina *término deducido del determinante.*

Como no es fácil recordar esta suma, he aquí una regla mnemotécnica, conocida con la denominación de la *Regla de Sarrus.*

Se obtiene el desarrollo de un determinante de tercer orden, colocando la primera y segunda columnas a continuación de la tercera y tomando la diagonal principal y las dos líneas paralelas a ella con signo más, y la secundaria y las dos líneas ralelas a ella con signo menos. Así:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Obsérvese que este desarrollo así obtenido coincide con el [13-a]. Al mismo resultado se hubiera llegado si se hubiese repetido la primera y segunda filas a continuación de la tercera y se hubiera tomado la diagonal principal y las dos líneas paralelas a ella con signo más y a continuación la diagonal secundaria y dos líneas paralelas a ella con signo menos.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -3 \\ 7 & 0 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 5 \cdot 0(-3) + (-3) \cdot 8 \cdot 6 +$$

$$+ 2 \cdot 7 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 6 - 5 \cdot 8 \cdot 1 - (-3) \cdot 7(-3) = -144 + 14 - 40 - 63 = -233$$

4. Propiedades de los determinantes. — 1.ª *Se puede cambiar en un determinante la primera fila por la primera columna, la segunda fila por la segunda columna,* etc., es decir, las filas por las correspondientes columnas, sin que el determinante cambie de valor.

En efecto, se tiene según lo visto anteriormente

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 \qquad [13\text{-b}]$$

Cambiando filas por columnas, se tiene

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

y como se ve

$$D = D'$$

2.ª *Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas, el determinante no cambia de valor absoluto, pero sí de signo.*

En efecto, si en [13-b] se cambian entre sí la 1.ª y 3.ª columnas, se tiene

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 - a_1b_2c_3 - c_1a_2b_3 - b_1c_2a_3$$

Por comparación con [13-b] se deduce

$$D = -D_1$$

3.ª *Para multiplicar un determinante por un número, basta multiplcar una línea cualquiera por ese número.*

En efecto, si multiplicamos la 2.ª fila de [13-b] por n, resulta

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1nb_2c_3 + b_1nc_2a_3 + c_1na_2b_3 - c_1nb_2a_3 - a_1nc_2b_3 - b_1na_2c_3$$

Sacando n factor común nos queda

$$D_2 = n\,(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3)$$

por lo que

$$D_2 = D \cdot n$$

4.ª *Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales, es nulo.*

En efecto, sea el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= n(a_1b_2c_2 + b_1c_2a_2 + c_1a_2b_2 - c_1b_2a_2 - a_1c_2b_2 - b_1a_2c_2)$$

en el que cada dos términos son iguales y opuestos, luego

$$D = n \cdot 0 = 0$$

5. Menor complementario y adjunto de un elemento de un determinante. — Desarrollado un determinante, saquemos factor común sucesivamente los elementos de una fila cualquiera, así:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Saquemos factores comunes los elementos de la segunda fila y se tiene

$$D = +a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})$$

que podemos poner así:

$$D = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

y esto, evidentemente, es igual a

$$D = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad [13\text{-c}]$$

Si nos fijamos

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se obtiene suprimiendo en D la fila y columna a que pertenece a_{21} y lo mismo se puede decir de los otros dos determinantes de segundo orden que van en el mismo miembro.

Pues bien, *llamamos menor complementario de un elemento* a_{21} *de un determinante* D, *al determinante que resulta al suprimir en* D *la fila y columna a que pertenece* a_{21}.

Al menor complementario de un elemento precedido del signo menos, si la suma de los subíndices del elemento es impar o del signo más si dicha suma es par, se denomina adjunto del citado elemento.

Según esto, *un determinante es igual a la suma algebraica de los productos de cada elemento de una línea por sus correspondientes adjuntos, o bien por sus menores complementarios, precedido cada producto del signo más si los subíndices del elemento tienen suma par y menos si tienen suma impar.*

Así:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -8 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -126 - 60 - 60 = -246$$

Obsérvese que es muy fácil encontrar el signo que corresponde a un adjunto. Se comienza por el primer elemento a_{11}, al que siempre corresponde $+$, recorriendo la fila o columna se pasa al siguiente a_{12}, al que corresponde $-$ y luego otro que se encuentra en la misma fila o columna que el último, a_{22}, al que corresponde $+$ y así sucesivamente, hasta alcanzar el elemento que se desea.

6. *Un determinante que tiene una línea suma de* n *sumandos, es igual a la suma de* n *determinantes, que se obtienen reemplazando la línea en cuestión, por los primeros sumandos, por los segundos sumandos, etc.*

En efecto, sea el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

en el que $a_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\quad b_2 = \beta_1 + \beta_2$ y $\quad c_2 = \gamma_1 + \gamma_2$.

Llamemos A_2, B_2 y C_2 a los respectivos adjuntos de a_2, b_2 y c_2, según lo dicho anteriormente

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \qquad [13\text{-d}]$$

y por consiguiente

$$D = A_2(\alpha_1+\alpha_2) + B_2(\beta_1+\beta_2) + C_2(\gamma_1+\gamma_2) =$$
$$= (A_2\alpha_1+B_2\beta_1+C_2\gamma_1) + (A_2\alpha_2+B_2\beta_2+C_2\gamma_2)$$

Pero $\quad D = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \quad$ y $\quad D' = A_2\alpha_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1$

lo cual nos prueba que si la primera igualdad es el determinante D, la segunda será el mismo determinante sustituyendo en él a_2, b_2 y c_2 por α_1, β_1 y γ_1.

Lo mismo se puede decir de $A_2\alpha_2 + B_2\beta_2 + C_2\gamma_2$.

Luego

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

como se quería demostrar.

7. Otras propiedades de los determinantes. — 1.ª *Si a una línea de un determinante se le suma otra paralela, multiplicada por un número, el determinante no varía.*

En efecto, sea el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad D' = \begin{vmatrix} a_1 + nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nc_1 & b_1 & c_1 \\ nc_2 & b_2 & c_2 \\ nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pero

$$\begin{vmatrix} nc_1 & b_1 & c_1 \\ nc_2 & b_2 & c_2 \\ nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

por tener dos líneas proporcionales.

Luego $$D = D'$$

como se quería demostrar.

2.ª *Un determinante que tiene una línea suma de varias paralelas, multiplicadas cada una por un número, es nulo.*

En efecto, sea el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & na_1 + mb_1 \\ a_2 & b_2 & na_2 + mb_2 \\ a_3 & b_3 & na_3 + mb_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & na_1 \\ a_2 & b_2 & na_2 \\ a_3 & b_3 & na_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & mb_2 \\ a_1 & b_1 & mb_1 \\ a_3 & b_3 & mb_3 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

pues los últimos determinantes tienen dos líneas paralelas proporcionales.

Todas estas propiedades, aunque demostradas para determinantes de tercer orden, son también ciertas para determinantes de órdenes superiores, lo cual nos permite hallar el desarrollo de un determinante de cualquier orden, por ejemplo, reduciéndolo a la suma de varios de tercer orden, o bien a uno sólo, como se verá en el ejemplo que sigue. Así

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 8 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D = -423 - 2\,569 + 1\,644 - 1\,392 = -2740$$

Se puede calcular de la siguiente manera

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Resto de la última columna la segunda y el determinante no varía.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 10 \\ 8 & 3 & 5 & -4 \\ 4 & 6 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

Resto la última columna multiplicada respectivamente por 3, 7 y 4 de la primera, segunda y tercera columna, y el determinante no varía; queda

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -25 & -73 & -38 & 10 \\ 20 & 31 & 21 & -4 \\ 13 & 27 & 20 & -3 \end{vmatrix}$$

que desarrollado por la primera fila queda

$$D = -1 \begin{vmatrix} -25 & -73 & -38 \\ 20 & 31 & 21 \\ 13 & 27 & 20 \end{vmatrix}$$

o bien:

$$D = \begin{vmatrix} 25 & 73 & 38 \\ 20 & 31 & 21 \\ 13 & 27 & 20 \end{vmatrix}$$

que se puede simplificar restando de la primera fila la segunda y de ésta la tercera, así

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 42 & 17 \\ 7 & 4 & 1 \\ 13 & 27 & 20 \end{vmatrix}$$

que aún se puede simplificar más restando la segunda fila de la primera y de la tercera

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 38 & 16 \\ 7 & 4 & 1 \\ 6 & 23 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 38-16 & 16 \\ 7 & 4-1 & 1 \\ 6 & 23-19 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 22 & 16 \\ 7 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 19 \end{vmatrix}$$

lo que podemos transformar en un determinante de segundo orden, restando primeramente de la segunda fila la tercera

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 22 & 16 \\ 1 & -1 & -18 \\ 6 & 4 & 19 \end{vmatrix}$$

y luego sumando a la primera fila la segunda multiplicada por 2 y restándola de la tercera multiplicada por 6. Así

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -20 \\ 1 & -1 & -18 \\ 0 & 10 & 127 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 20 & -20 \\ 10 & 127 \end{vmatrix} = -20(127+10) = -2\,740$$

Aquí no hemos hecho más que aplicar una nueva regla para desarrollar un determinante, que consiste en obtener por sumas y restas de líneas paralelas, otro determinante equivalente al anterior y que tenga un elemento igual a la unidad, y luego restar la línea que contenga dicho elemento multiplicado por números convenientemente elegidos, de las demás paralelas, de forma que se anulen todos los demás elementos de dicha línea, con lo cual al desarrollar el determinante por esa línea, se obtiene un solo determinante equivalente al dado y de grado inferior en una unidad.

14. Resolución de sistemas de ecuaciones. Regla de Cramer

1. Método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones lineales. — Resolver un sistema de ecuaciones, es hallar sus soluciones. Apoyados en los teoremas fundamentales de equivalencia de sistemas, será posible ir eliminando sucesivamente las incógnitas de la siguiente manera, fácil de justificar: Sea el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned} \qquad [14\text{-a}]$$

Supongamos que $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, y $a_3 \neq 0$, entonces multipliquemos los dos miembros de la primera ecuación por a_2 y los de la segunda por a_1 y restemos miembro a miembro, y con los resultados reemplacemos la segunda ecuación. Habremos conseguido eliminar la x de ella.

Eliminemos igualmente la x de la tercera ecuación, con lo que habremos obtenido el nuevo sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ (a_1b_2 - b_1a_2)\,y + (a_1c_2 - c_1a_2)\,z &= k_2a_1 - a_2k_1 \\ (a_1b_3 - b_1a_3)\,y + (a_1c_3 - c_1a_3)\,z &= k_3a_1 - a_3k_1 \end{aligned} \qquad [14\text{-b}]$$

equivalente al [14-a], según el teorema fundamental. Pero estas ecuaciones son de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ b'_2y + c'_2z &= k'_2 \\ b'_3y + c'_3z &= k'_3 \end{aligned} \qquad [14\text{-c}]$$

Obsérvese que si alguno de los coeficientes a_1, a_2, a_3 hubiese sido nulo, no habría sido necesario realizar las dos eliminaciones, hubiera bastado con una o con ninguna.

Pero entre la segunda y tercera ecuaciones será posible eliminar y, siguiendo una marcha enteramente igual a los casos anteriores y con el resultado de la eliminación, reemplazar la tercera ecuación. Así obtendremos el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ b'_2y + c'_2z &= k'_2 \\ c''_3z &= k''_3 \end{aligned}$$

que es equivalente al anterior y por consiguiente al [14-a]. En este sistema es inmediato el cálculo del valor de z:

$$z = \frac{k_3''}{c_3''}$$

Llevando este valor a las dos primeras ecuaciones, nos pone en condiciones de calcular el valor de y. Nuevamente llevado este valor a la primera, nos permite calcular el valor de x, con lo que hemos encontrado la solución del sistema.

EJEMPLO:
$$\begin{aligned} 5x - 7y + 2z &= -23 \\ 3x + 2y - 9z &= -52 \\ 6x + 4y + z &= 48 \end{aligned}$$

Eliminemos x en la segunda y tercera, y luego y en la tercera, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 5x - 7y + 2z &= -23 \\ -31y + 51z &= 191 \\ -62y - 7z &= 378 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y + 2z = -23 \\ -31y + 51z = 191 \\ 95z = 760 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7y - 2z - 23}{5} = \dfrac{10}{5} = 2 \\ y = \dfrac{191 - 51z}{-31} = \dfrac{217}{31} = 7 \\ z = 8 \end{cases}$$

Si aconteciere que en el sistema final existe alguna ecuación absurda, entonces, el sistema es incompatible.

2. **Método de sustitución.** — Es otro método clásico y además válido para sistemas en los cuales no todas las ecuaciones son lineales. Razonemos la resolución del sistema:

$$\begin{aligned} 6x - 3y - 3z &= 19 \\ 2x + y + 6z &= 13 \\ 4x + 4y - 9z &= -42 \end{aligned} \qquad [14\text{-d}]$$

Hallamos x en la primera ecuación, y su valor, dado en función de y y z, se sustituye en las otras ecuaciones, obteniéndose así otro sistema equivalente sin la x, en la segunda y tercera ecuaciones.

$$\begin{aligned} x &= \frac{19 + 3y + 3z}{6} \\ 2\frac{19 + 3y + 3z}{6} + y + 6z &= 13 \\ 4\frac{19 + 3y + 3z}{6} + 4y - 9z &= -42 \end{aligned} \qquad [14\text{-e}]$$

En efecto, si $x = a$, $y = b$ y $z = c$, es una solución de [14-d], es también solución de la primera ecuación de [14-e], por ser la misma ecuación en ambos sistemas. Esto supone que en las otras dos ecuaciones de [14-e], sucede que las fracciones se transforman en a y como el resto es idéntico en ambos sistemas, ambas ecuaciones quedan satisfechas con estos valores. Luego toda solución de [14-d] es solución de [14-e].

Recíprocamente, si $x = a_1$, $y = b_1$ y $z = c_1$, es una solución de [14-e], es solución de la primera ecuación de [14-d], ya que es la misma que la primera de [14-e]. Además, como las fracciones de la segunda y tercera ecuaciones de [14-e] se transforman en a_1, resulta que esas soluciones satisfacen a las dos últimas ecuaciones de [14-d] también. Luego toda solución de [14-e] es solución de [14-d].

Esto nos dice que [14-d] y [14-e] son dos sistemas equivalentes.

El sistema [14-e] presentado así:

$$x = \frac{19 + 3y + 3z}{6}$$

$$6y + 21z = 20$$

$$18y - 21z = -164$$

nos permite aplicar el mismo procedimiento a las dos últimas ecuaciones, con lo que se obtiene el sistema equivalente a los anteriores,

$$x = \frac{19 + 3y + 3z}{6}$$

$$y = \frac{20 - 21z}{6}$$

$$z = \frac{164 + 60}{63 + 21}$$

que nos permite hallar la solución $z = \frac{8}{3}$, $y = -6$, $x = \frac{3}{2}$ que por satisfacer al último sistema, satisface también al primero.

3. **Método de igualación.** — Apliquémoslo razonadamente al sistema

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 3z &= 36 \\ 5x + 3y - 6z &= -12 \\ x - 9y - 3z &= -20 \end{aligned} \qquad [14\text{-f}]$$

Demostremos que si hallamos el valor de x en las tres ecuaciones e igualamos el obtenido en la primera ecuación con los obtenidos en las otras dos y a continuación escribimos un nuevo sistema formado por la primera ecuación y las otras

dos igualdades obtenidas, dicho sistema es equivalente al primero. En efecto, escrito conforme hemos dicho, se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{36 + 6y - 3z}{2} \\ \frac{36 + 6y - 3z}{2} &= \frac{6z - 3y - 12}{5} \\ \frac{36 + 6y - 3z}{2} &= 9y + 3z - 20 \end{aligned} \qquad [14\text{-g}]$$

Si suponemos que una solución de [14-f] es $x = a$, $y = b$ y $z = c$, se tienen las identidades

$$\left.\begin{aligned} 2a - 6b + 3c &= 36 \\ 5a + 3b - 6c &= -12 \\ a - 9b - 3c &= -20 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} a &= \frac{36 + 6b - 3c}{2} \\ a &= \frac{36 + 6b - 3c}{2} = \frac{6c - 5b - 12}{5} \\ a &= \frac{36 + 6b - 3c}{2} = 9b + 3c - 20 \end{aligned}\right.$$

Luego toda solución de [14-f] lo es de [14-g].

Recíprocamente. Sea $x = a_1$, $y = b_1$ y $z = c_1$ una solución de [14-g], se tienen las identidades

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{36 + 6b_1 - 3c_1}{2} \\ a_1 &= \frac{36 + 6b_1 - 3c_1}{2} = \frac{6c_3 - 3b_3 - 8}{5} \\ a_1 &= \frac{36 + 6b_1 - 3c_1}{2} = 9b_1 + 3c_1 - 20 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} 2a_1 - 6b_1 + 3c_1 &= 36 \\ 5a_1 + 3b_1 - 6'c_1 &= -8 \\ a_1 - 9b_1 + 3c_1 &= -20 \end{aligned}\right.$$

lo que nos dice que cualquier solución de [14-g] satisface a la [14-f]. Por consiguiente, los sistemas estudiados tienen las mismas soluciones.

Ahora bien, poniendo el [14-g] de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{36 + 6y - 3z}{2} \\ 36y - 27z &= -204 \\ 12y + 9z &= 76 \end{aligned}$$

y eliminando y, por igualación entre las dos últimas ecuaciones, nos queda el sistema equivalente

$$x = \frac{36 + 6b - 3z}{36}$$

$$y = \frac{27z - 204}{2}$$

$$z = \frac{144}{18} = 8$$

que nos permite hallar las soluciones del sistema estudiado.

4. Métodos especiales. — A algunos sistemas no se les puede aplicar los métodos anteriores, y es necesario servirse de métodos especiales. Lo veremos con ejemplos:

1.° El sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ y + z &= 5 \\ z + x &= 8 \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro, se obtiene el siguiente

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 20 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 8 \end{aligned}$$

sistema equivalente. Restando m. a m. de la primera las otras dos, nos queda

$$\begin{aligned} x + y + z = 10 &\Longrightarrow z = 3 \\ x &= 5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

sistema equivalente que nos permite calcular las soluciones.

2.°

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} + \frac{c_1}{z} &= k_1 \\ \frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} + \frac{c_2}{z} &= k_2 \\ \frac{a_3}{x} + \frac{b_3}{y} + \frac{c_3}{z} &= k_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a_1x' + b_1y' + c_1z' &= k_1 \\ a_2x' + b_2y' + c_2z' &= k_2 \\ a_3x' + b_3y' + c_3z' &= k_3 \end{aligned}$$

que nos permite calcular $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$ y $z' = \frac{1}{z}$ y por consiguiente x, y, z, soluciones del sistema.

5. Discusión de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. — Sea el sistema

$$a_1x + b_1y = k_1$$
$$a_2x + b_2y = k_2$$

Por de pronto, cada una de esas ecuaciones representa una recta en coordenadas cartesianas, por ser de primer grado con dos incógnitas.

Resuelto el sistema se tiene:

$$x = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Examinemos los casos posibles:

1.° $a_1b_2 \neq a_2b_1$, entonces los valores de las incógnitas toman la forma

$$x = \frac{m}{d} \qquad y = \frac{n}{d}$$

Esto indica que existe un sólo punto $P\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$, común a ambas rectas, pues esas coordenadas satisfacen a la ecuación. Conforme con haber hallado un solo valor para cada una de las incógnitas.

Además, por el hecho de que $a_1b_2 \neq a_2b_1 \Longrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, las rectas son coplanarias y no paralelas.

2.°
$$a_1b_2 = a_2b_1$$
$$k_1b_2 \neq k_2b_1$$

Entonces las soluciones son $x = \frac{m}{0}$, $y = \frac{n}{0}$, es decir, que las rectas son paralelas, pues

$$\left.\begin{array}{l} a_1b_2 = a_2b_1 \Longrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ k_1b_2 \neq k_2b_1 \Longrightarrow \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{k_1}{k_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{k_1}{k_2}$$

Condición para que las rectas, siendo paralelas, no se confundan.

Algebraicamente, el hecho de que la solución sea infinita, indica que el sistema es incompatible, no tiene solución real.

3.° $\left.\begin{array}{l} a_1b_2 = a_2b_1 \\ k_1b_2 = k_2b_1 \end{array}\right\}$ Entonces las soluciones tienen la forma $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Es decir, que las soluciones son indeterminadas, lo que quiere decir que cualquier número es solución.

Geométricamente,

$$\left.\begin{array}{l} a_1b_2 = a_2b_1 \\ k_1b_2 = k_2b_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{k_1}{k_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

Lo cual indica que las rectas son coincidentes, y por otra parte, que las ecuaciones son una consecuencia de la otra, es decir, que se pasa de una a otra multiplicando ambos miembros de una de ellas por un número independiente de la incógnita.

6. Regla de Cramer. — Una de las aplicaciones de los determinantes es la conocida Regla de Cramer, para resolución de sistemas de ecuaciones lineales, con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Sea el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= K_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= K_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= K_3 \end{aligned}$$

cuyo determinante de los coeficientes es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Si designamos por A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, ... los adjuntos de los elementos representados por las mismas letras con los mismos subíndices, podemos poner, según 13-5:

$$\Delta = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 = B_1b_1 + B_2b_2 + B_3b_3 = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + \ldots \qquad [14\text{-h}]$$

Multipliquemos la primera ecuación por A_1, la segunda por A_2 y la tercera por A_3 y sumemos miembro a miembro; queda

$$\begin{aligned} x(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + y(b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3) + z(c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3) = \\ = A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 \end{aligned}$$

o bien, puesto que el primer paréntesis es Δ, según [14-h], los demás paréntesis y el término independiente son idénticos al anterior, con sólo sustituir a_1, a_2, a_3 por las respectivas *bes, ces, Kas.* Es decir, que

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 & b_1 & c_1 \\ K_2 & b_2 & c_2 \\ K_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

pero el segundo y tercer determinantes son nulos, luego queda:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} K_1 & b_1 & c_1 \\ K_2 & b_2 & c_2 \\ K_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

Es claro que esta ecuación, junto con la segunda y tercera, forman otro sistema equivalente al dado, según 12-3, y por tanto el valor hallado para x es verdadera solución del sistema.

Si repetimos las operaciones anteriores, pero multiplicando la primera ecuación por B_1, la segunda por B_2 y la tercera por B_3, y luego por C_1, C_2, C_3, obtendremos respectivamente, después de sumar miembro a miembro:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & K_1 & c_1 \\ a_2 & K_2 & c_2 \\ a_3 & K_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & K_1 \\ a_2 & b_2 & K_2 \\ a_3 & b_3 & K_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Obsérvese que para que x, y, z, tengan valores finitos y determinados, es necesario que $\Delta \neq 0$, es decir, el denominador no ha de ser nulo.

Esto generalizado, nos permite enunciar la Regla de Cramer de la siguiente manera: *Dado un sistema de* n *ecuaciones con* n *incógnitas, será compatible y determinado si el determinante de los coeficientes no es nulo y hallaremos las soluciones dividiendo por ese mismo determinante, el que resulta de sustituir en él, los coeficientes de la incógnita que tratamos de hallar, por los términos independientes.*

EJEMPLO. Resolver

$$\begin{aligned} 5x - 6y + 4z &= 7 \\ 3x + y - z &= 3 \\ x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

Las soluciones serán:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{11}{6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{17}{6}$$

7. Resolución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. — Sea el sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= 0 \end{aligned}$$

Es evidente que siempre admite la solución $x = y = z = 0$, pero si no tiene otra solución se dice que es *incompatible.*

Un caso particular será cuando el número de incógnitas exceda en una unidad al de ecuaciones. Se podrá poner así:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= -d_1u \\ a_2x + b_2y + c_2z &= -d_2u \\ a_3x + b_3y + c_3z &= -d_3u \end{aligned}$$

y se podrá aplicar la Regla de Cramer si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

y entonces:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -d_1u & b_1 & c_1 \\ -d_2u & b_2 & c_2 \\ -d_3u & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = -u \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$y = -u \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad z = -u \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

que se puede poner:

$$\frac{-u}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}$$

lo que nos prueba que las soluciones serían cualquier conjunto de números proporcionales a los correspondientes determinantes.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 2x - 7y + 4z - 2u &= 0 \\ 5x + 2y - 3z + u &= 0 \\ 3x + y - z - u &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones serán:

$$\frac{-u}{\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{x}{\begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{-u}{26} = \frac{x}{-18} = \frac{y}{-32} = \frac{z}{-60}$$

$$\frac{u}{13} = \frac{x}{9} = \frac{y}{16} = \frac{z}{30}$$

Las soluciones serán:

$$x = 9n, \quad y = 16n, \quad z = 30n, \quad u = 13n$$

Pudiendo tomar n cualquier valor racional o irracional.

8. Ecuaciones diofánticas. — 1) Una ecuación con más de una incógnita tiene, en general, infinidad de soluciones, por lo que se ha llamado indeterminada o diofántica; pero si además a esa ecuación se le impone la condición de que esas soluciones sean enteras o positivas, o mayores que un número dado, etc., podrá suceder que el número de soluciones sea finito o no tenga solución.

EJEMPLO: La ecuación $5x + 3y = 18$, tiene infinitas soluciones, que se obtendrán dando valores arbitrario a x y hallando los correspondientes de y, así:

$$y = \frac{18 - 5x}{3} \begin{cases} x = 1 & x = 2 & \ldots. \\ y = \dfrac{18-5}{3} = \dfrac{13}{3} & y = \dfrac{18-10}{3} = \dfrac{8}{3} & \ldots. \end{cases}$$

Pero sólo tiene una entera y positiva, que es $x = 3$, $y = 1$. Por lo tanto, una ecuación con más de dos incógnitas, que en general es indeterminada, puede ser determinada si se le impone alguna condición.

Puesto que resolver un sistema de ecuaciones, en definitiva se reduce a la resolución de una ecuación, resultado de reducir las demás, lo dicho para una ecuación se aplica a un sistema de más incógnitas que ecuaciones, pues dará lugar, en general, a la resolución de una ecuación con varias incógnitas.

El objeto que se propone el estudio de las ecuaciones diofánticas es precisamente encontrar las soluciones en el conjunto de los números naturales o enteros de estas ecuaciones o sistemas indeterminados. Aquí estudiaremos los casos siguientes:

Ecuación lineal $ax \pm by = \pm k$, con dos incógnitas.

Sea m. c. d. $(a, b) = d$. Se podrá escribir

$$a = da' \qquad \text{y} \qquad b = db'$$

Si x_1 e y_1 son soluciones, se tiene

$$a'dx_1 \pm b'dy_1 = \pm k \qquad a'x_1 \pm b'y_1 = \pm \frac{k}{d} \qquad (x_1, y_1) \in Z \Longrightarrow \frac{k}{d} \in Z$$

Es decir, que la condición necesaria para que la ecuación lineal con dos incógnitas tenga solución en Z, es que k sea divisible por el máximo común divisor de a y b.

La ecuación dada puede presentar las cuatro formas siguientes, en las que a y b son primos y si no lo fueran dividiríamos los dos miembros por su máximo común divisor:

$$ax + by = k; \qquad ax - by = k; \qquad ax + by = -k; \qquad ax - by = -k$$

La tercera no tiene solución entera positiva, pues la suma de dos números positivos no puede ser negativa, y la cuarta es idéntica a la segunda, con sólo cambiarle el signo y sustituir x por y e y por x. Quedan, pues, las formas

$$ax + by = k \qquad\qquad ax - by = k \qquad\qquad [14\text{-i}]$$

Ahora bien, 0, 1, 2, 3, 4, ... $(a-1)$ es un sistema completo de números incongruentes mód. a, luego también lo son (8-7) los conjuntos:

$$k - b \cdot 0,\ k - b \cdot 1,\ k - b \cdot 2, k - b \cdot 3,\ \ldots\ k - b(a-1)$$

$$\text{y} \quad b \cdot 0 + k,\ b \cdot 1 + k,\ b \cdot 2 + k, b \cdot 3 + k,\ \ldots\ b(a-1) + k$$

Por consiguiente, en cada uno de estos sistemas existe un número y uno sólo, múltiplo de a o que le corresponde resto cero, es decir, que

$$\begin{aligned} &\text{múlt. } a = k - by_1 = ax_1 \Longrightarrow ax_1 + by_1 = k \\ \text{y} \quad &\text{múlt. } a = by_1 + k = ax_1 \Longrightarrow ax_1 - by_1 = k \end{aligned} \qquad [14\text{-j}]$$

Pero en ambos casos x_1 e y_1 son números enteros, constituyen una solución de la respectiva ecuación. Se puede poner

$$ax + by = ax_1 + by_1 \Longrightarrow x_1 - x = b\frac{y - y_1}{a}$$

y

$$ax - by = ax_1 - by_1 \Longrightarrow x - x_1 = b\frac{y - y_1}{a}$$

Pero $x_1 - x$ y $x - x_1$ son números enteros, luego $\dfrac{y - y_1}{a} = t$ es número entero.

$$\begin{aligned} x_1 - x &= bt \\ y - y_1 &= at \end{aligned} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{aligned} x - x_1 &= bt \\ y - y_1 &= at \end{aligned}$$

que se transforman en

$$x = x_1 - bt \qquad\qquad x = x_1 + bt$$
$$y = y_1 + at \qquad\qquad y = y_1 + at$$

mediante las cuales, dando a t valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, que hagan posible la sustracción con los números naturales, se obtienen soluciones enteras y positivas, es decir, se resuelve la ecuación. El signo más o menos depende de $y - y_1$.

Recíprocamente, cualquier valor entero de t nos da una solución, pues

$$a(x_1 - bt) + b(y_1 + at) = ax_1 + by_1 = k$$

EJEMPLO: 1) $6x + 13y = 346$.

Pongo $346 - 13y =$ múlt. 6.

Una solución es $y_1 = 10$ y $x_1 = 36$.

$$\begin{matrix} x = 36 - 13t \\ y = 10 + 6t \end{matrix} \qquad \begin{matrix} t = -1,\ 0,\ 1,\ 2 \\ x = 49,\ 36,\ 23,\ 10 \\ y = 4,\ 10,\ 16,\ 22 \end{matrix} \qquad \text{son las soluciones}$$

2) Resolución de $x^2 + y^2 = z^2$, conocida una solución de a, b, c, se obtienen infinitas multiplicándolas por un número cualquiera n, pues

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad\qquad a^2n^2 + b^2n^2 = c^2n^2$$

Por tanto, quedará resuelta si hallamos los valores de a, b, c primos entre sí.

Puesta así,

$$(z+y)(z-y) = x^2$$

Demos a x valores arbitrarios y descompongamos x^2 en dos factores primos entre sí, b y c, para lo cual es suficiente poner $x = u \cdot v$, siendo u y v primos entre sí, por lo que

$$b = u^2 = z + y \qquad \text{y} \qquad c = v^2 = z - y.$$

Cada una de estas descomposiciones da una solución si u y v son impares.

$$x = u \cdot v, \qquad y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

EJEMPLO:

x	$7 = 7 \cdot 1$	$9 = 9 \cdot 1$	$15 = 5 \cdot 3$	...
y	24	40	112	...
z	25	41	113	...

15. División de polinomios de una variable. Principio de identidad

1. División de monomios. — *El cociente de dos monomios se halla escribiendo otro monomio que tenga por coeficiente el cociente de los coeficientes del dividendo y divisor, y por parte lineal, las letras del dividendo con exponentes disminuidos en los correspondientes de las letras del divisor.*

Es evidente, pues haciendo la prueba de multiplicar el divisor por el cociente nos da el dividendo.

Observemos que si alguna letra del divisor no está en el dividendo, o cuyo exponente es menor en éste que en aquél, el cociente llevará esa letra en el denominador.

EJEMPLOS:

$$8\,x^5y^4z^7 : 2\,xy^3z^6 = 4\,x^4yz$$

$$6\,x^5yz^3 : 7\,x^3y^4z^2 = \frac{6}{7}\,\frac{x^2z}{y^3}$$

2. División de un polinomio por un monomio. — Por la propiedad distributiva de la división, podemos enunciar la siguiente regla:

El cociente de un polinomio por un monomio, es igual a la suma de los cocientes de cada término del polinomio, por el monomio divisor.

EJEMPLO:

$$(8\,x^4y^2z^4 - 6\,x^3y^3z^3 + 5\,x^2y^2z^5) : 2\,x^2y^2z = 4\,x^2z^3 - 3\,xy^6z^2 + \frac{5}{2}\,z^4$$

3. División de polinomios enteros de una variable. — Se trata de resolver la siguiente cuestión: *Dados dos polinomios* D(x) *y* d(x), *llamados dividendo y divisor, hemos de hallar otros dos* C(x) *y* R(x), *cociente y resto, tales que satisfagan a las condiciones:*

$$D(x) = d(x)\,C(x) + R(x) \qquad [15\text{-a}]$$

grado de $R(x) <$ grado de $d(x)$.

Para obtener el cociente, supongamos que el dividendo y divisor son respectivamente:

$$D(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + \ldots + a_7$$

$$d(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$$

Comenzamos por ordenar ambos polinomios por las potencias decrecientes de la variable y dividimos el primer término de $D(x)$ por el primero de $d(x)$, con lo que obtenemos el primer término del cociente, como se verá.

Supuesto que $c_0x^4 = a_0x^7 : b_0x^3$, restemos del dividendo el producto $c_0x^4\, d(x)$ y así obtendremos otro polinomio R_1, que ha de ser de grado $7-1$ a lo más, pues el primer término de $D(x)$, se elimina al restar. Podemos, pues, poner:

$$D(x) = c_0x^4\, d(x) + R_1 \qquad [15\text{-b}]$$

en el que R_1 es un polinomio que tiene la forma

$$R_1 = a'_0x^6 + a'_1x^5 + \ldots$$

Una vez hallado $c_1x^3 = a'_0x^6 : b_0x^3$, restamos de R_1 el producto $c_1x^3\, d(x)$ y obtenemos R_2, de modo que

$$R_1 = c_1x^3 d(x) + R_2 \qquad [15\text{-c}]$$

Siendo R_2 otro polinomio de grado inferior al de R_1.

Siguiendo la misma marcha, podemos poner:

$$R_2 = c_2x^2 d(x) + R_3, \qquad R_3 = c_3x d(x) + R_4, \qquad R_4 = c_4 d(x) + R_5 \qquad [15\text{-d}]$$

en el que R_5 es un polinomio cuyo grado es inferior al de $d(x)$.

Obsérvese que hemos de llegar a un polinomio R_5 de grado inferior a $d(x)$, puesto que los polinomios $D(x)$, R_1, R_2, R_3, ... van disminuyendo de grado.

Si sumamos miembro a miembro [15-b], [15-c] y [15-d], tendremos:

$$D(x) = c_0x^4 d(x) + c_1x^3 d(x) + c_2x^2 d(x) + c_3x d(x) + c_4 d(x) + R_5$$

o bien,

$$D(x) = d(x)\,[c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4] + R_5$$

en el que

$$c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = C(x) \qquad \text{y} \qquad R_5 = R(x)$$

De aquí la regla siguiente: *Para dividir dos polinomios con una variable, se comienza por ordenarlos con relación a esa variable, luego se divide el primer monomio del dividendo por el primero del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente, cuyo producto por el divisor se resta del dividendo, siendo la diferencia el primer dividendo parcial. Con él se hace lo mismo que con el dividendo. Se continúa así hasta que se obtenga un dividendo parcial cuyo grado sea inferior al del divisor, que será el resto, ya que cumplen las condiciones impuestas en* [15-a].

En la práctica se suelen hacer las restas mentalmente y la operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{l|l} 3x^5 + 6x^4 - 2x^2 - 1 & 2x^2 - 4x + 2 \\ \quad 12x^4 - 3x^3 & \hline \quad 21x^3 - 14x^2 & \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 + \frac{21}{2}x + 14 \\ \quad\quad 28x^2 - 21x & \\ \quad\quad\quad 35x - 29 & \end{array}$$

4. División por $x - a$ de un polinomio entero y ordenado, según las potencias decrecientes de x. — Apliquemos la regla anterior a la siguiente división:

$$\begin{array}{l|l} a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 & x - a \\ \hline -a_0x^5 + b_0ax^4 & b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 \\ \hline \quad b_1x^4 & \\ \quad -b_1x^4 + b_1ax^3 & \\ \hline \quad\quad b_2x^3 & \\ \quad\quad -b_2x^3 + b_2ax^2 & \\ \hline \quad\quad\quad b_3x^2 & \\ \quad\quad\quad -b_3x^2 + b_3ax & \\ \hline \quad\quad\quad\quad b_4x & \\ \quad\quad\quad\quad -b_4x + b_4a & \\ \hline \quad\quad\quad\quad R & \end{array}$$

De la marcha de la operación se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + b_0a \\ b_2 &= a_2 + b_1a \\ b_3 &= a_3 + b_2a \\ b_4 &= a_4 + b_3a \\ R &= a_5 + b_4a \end{aligned}$$

lo que nos dice que:

El primer coeficiente del cociente es el primer coeficiente del dividendo. Cada uno de los coeficientes del cociente se obtienen multiplicando el anterior por a *y sumando al producto el coeficiente del dividendo que ocupa el mismo lugar. El resto es igual al término independiente del cociente multiplicado por* a, *más el último término del dividendo.*

Esto supone que el cociente es un polinomio cuyo grado es el del dividendo disminuido en una unidad, como se puede apreciar en el ejemplo.

En la práctica, la operación se realiza de la siguiente manera, cuya disposición y marcha es fácil de comprender:

$$\begin{array}{lcccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a) & & b_0a & b_1a & b_2a & b_3a & b_4a \\ \hline & a_0 = b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & R \end{array} \qquad \text{[15-e]}$$

Este método constituye la regla de Ruffini.

5. Valor del resto. — Hagamos en la operación anterior

$$C(x) = \quad b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$$
$$D(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

Entonces se puede poner:

$$D(x) = (x-a)\,C(x) + R$$

Si ahora en lugar de x ponemos a, queda

$$D(a) = 0 \cdot C(a) + R = R$$

Es decir, que

$$a_0a^5 + a_1a^4 + a_2a^3 + a_3a^2 + a_4a + a_5 = R \qquad [15\text{-f}]$$

Lo cual nos dice que:

1.° *El resto de dividir un polinomio entero y ordenado en* x, *por* x − a, *es el valor que toma dicho polinomio al sustituir* x *por* a.

2.° *Por tanto, para hallar el valor numérico de un polinomio para* x = a, *es suficiente con hallar el resto de dividir dicho polinomio por* x − a, *lo que se puede calcular como se indica en* [15-e].

3.° *La condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero y ordenado en* x *sea divisible por* x − a, *es que se anule al sustituir* x *por* a.

EJEMPLO:

$$(6x^3-34x-60) : (x-3)$$

lo disponemos así:

	6	0	−34	−60
3)		18	54	60
	6	18	20	0

Cociente: $6x^2 + 18x + 20$ Resto = 0.

Comprobamos que

$$R = 6 \cdot 3^3 - 34 \cdot 3 - 60 = 162 - 102 - 60 = 0$$

4.° *Puesto que* x + a = x − (−a), *las reglas anteriores, tanto del cociente como del resto son válidas al dividir un polinomio en* x, *entero y ordenado, por* x + a, *con sólo sustituir* a *por* −a.

EJEMPLO: Dividir

$$2x^4 - 3x^2 + 4 \text{ por } x + 2$$

Lo disponemos

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -2) & & -4 & 8 & -10 & 20 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & -10 & 24 \end{array}$$

Cociente: $2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$

Resto $= 24 = 2(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4$.

6. División de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$.

1.° $\dfrac{x^m + a^m}{x - a} \longrightarrow$ Cociente $= x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$
Resto: $R = a^m + a^m = 2a^m$

No se ha hecho más que aplicar la regla de Ruffini para el cociente y el resto.

2.° $\dfrac{x^m - a^m}{x - a} \longrightarrow$ Cociente $= x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$
Resto: $R = a^m - a^m = 0$

3.° $\dfrac{x^m + a^m}{x + a} \longrightarrow$ Cociente $= x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} \ldots \pm a^{m-1}$
Resto: $R = (-a)^m + a^m$

En este caso si m es par, $R = 2a^m$, y si es impar, $R = 0$.

4.° $\dfrac{x^m - a^m}{x + a} \longrightarrow$ Cociente $= x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} \ldots \pm a^{m-1}$
Resto: $R = (-a)^m - a^m$

En este caso, $R = -2a^m$, si m es impar, y $R = 0$ si m es par.

7. Descomposición factorial de un polinomio entero, de una sola variable. — Dado un polinomio entero de grado m en x:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \ldots + a_m$$

si tiene una raíz, o valor de x que lo anula (en Álgebra se demuestra que todo polinomio de grado m tiene al menos una raíz real o compleja) por ejemplo $x = b_1$, será divisible, según (15-5-3.°) por el binomio

$$x - b_1 \qquad [15\text{-g}]$$

Esto quiere decir que existe un polinomio $P_1(x)$, que satisface a la relación:

$$P(x) = (x - b_1)P_1(x) \qquad [15\text{-h}]$$

Siendo $P_1(x)$, según la regla de Ruffini, un polinomio de grado $m - 1$, y cuyo primer coeficiente es a_0.

Por otra parte, $P_1(x)$ también se anulará para otro valor de $x = b_2$, por ejemplo, por lo que la [15-h] se podrá poner:

$$P_1(x) = (x-b_2)\,P_2(x)$$

en donde $P_2(x)$ es de grado $m - 2$.

Siguiendo esta marcha, necesariamente llegaremos a un polinomio tal que

$$P_{m-1} = (x-b_m)\,a_0$$

cuando $P_{m-1}(x)$ sea de primer grado, cosa que necesariamente ha de llegar.

Por sustituciones sucesivas, podemos poner:

$$P(x) = (x-b_1)(x-b_2)\,P_2(x) = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\,P_3(x) = \ldots$$

y así hasta

$$P(x) = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_m)\,a_0 \qquad [15\text{-i}]$$

Luego, todo polinomio de grado m *tiene* m *valores de* x: b_1, b_2, b_3, ..., b_m *que lo anulan, y es igual al producto de su primer coeficiente por el producto de los binomios* $(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_m)$.

Si en [15-i] sustituimos x por un valor b distinto de las raíces halladas, no se anula por no anularse ninguno de los factores del segundo miembro.

Esto nos dice que un polinomio de grado m sólo puede tener m soluciones o *ceros* si su coeficiente a_0 no es nulo.

8. Principio de identidad de polinomios de una variable. — *Si un polinomio es tal que todos sus coeficientes se anulan al reducir sus términos, se dice que es un polinomio idénticamente nulo.*

EJEMPLO: $(x+b)^2 - (x^2+b^2+2bx)$.

I. *Si un polinomio de grado* n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}\ldots a_{n-1}x + a_n$$

se anula para más de n *valores, dicho polinomio es idénticamente nulo.*

En efecto, según el párrafo anterior, existirán n valores

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad \ldots\quad b_n$$

que anulan al $P(x)$ y podemos poner:

$$P(x) = a_0(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_n)$$

Si se anula para otro valor b, distinto de los anteriores, será

$$P(b) = 0$$

o bien,

$$a_0(b-b_1)(b-b_2)(b-b_3)\ldots(b-b_n) = 0$$

lo cual sólo es posible en el caso de que

$$a_0 = 0$$

Pero entonces resulta que

$$P(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

es un polinomio que se anula para los valores

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad \ldots\ b_n$$

de la variable.

Haciendo las mismas consideraciones de antes, llegaremos a la conclusión de que

$$a_1 = 0$$

Siguiendo este razonamiento, tendremos que

$$a_2 = 0,\quad a_3 = 0,\quad \ldots\quad a_{n-1} = 0,\quad a_n = 0$$

con lo que queda demostrado el teorema.

II. *Si dos polinomios* P(x) *y* Q(x), *de grados respectivamente* m *y* n, *toman los mismos valores numéricos para un número* p > m *y* p > n *de valores de* x, *la diferencia* P(x) − Q(x), *es un polinomio idénticamente nulo.*

En efecto, si $m \gtrless n$

$$F(x) = P(x) - Q(x)$$

será a lo más de grado m y se anula para $p > m$ valores de x, puesto que hacen a $P(x)$ y $Q(x)$ tomar valores iguales. Según el caso anterior $F(x)$ es idénticamente nulo, como se quería demostrar.

9. Si un polinomio entero $P(x, y, z, \ldots t)$ con n variables, se anula para cualquier sistema de valores de sus variables, es idénticamente nulo. — Lo demostraremos por inducción.

Supongamos que es cierto para $n - 1$ variables, podemos escribir el polinomio de la siguiente manera:

$$P(x, y, z, \ldots t) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

siendo A_0, A_1, A_2, ... A_{m-1} y A_m, polinomios enteros con $n - 1$ variables, de la forma

$$A_0 = f_1(y, z, \ldots t),\qquad A_1 = f_2(y, z, \ldots t),\qquad A_m = f_m(y, z, \ldots t)$$

Dando a todas las variables excepto a x, un sistema cualquiera de valores, los coeficientes se transforman en

$$a_0 = f_0(b, c, \ldots h), \qquad a_1 = f_1(b, c, \ldots h), \qquad a_m = f_m(b, c, \ldots h)$$

Y el polinomio en

$$P(x, b, c, \ldots h) = Q(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$

El cual, para cualquier valor x, según se desprende de la hipótesis, se anula. Esto quiere decir que $P(x, b, c, \ldots h)$ es idénticamente nulo, y como $b, c, d, \ldots h$ es un sistema cualquiera de valores atribuidos a las variables $y, z, \ldots t$, que anulan a

$$A_0 = f_0(y, z, \ldots t), \qquad A_1 = f_1(y, z, \ldots t), \qquad A_m = f_m(y, z, \ldots t)$$

lo cual supone que los polinomios

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots \quad A_m,$$

son idénticamente nulos, al suponer que el teorema era cierto para polinomios de $n - 1$ variables.

Es decir, que en este supuesto el polinomio $P(x, y, z, \ldots t)$ de n variables, es idénticamente nulo por anularse para cualquier sistema de valores de sus variables.

Hemos demostrado que si el teorema es cierto para polinomios de un número cualquiera $n - 1$ de variables, lo es para una variable más, es así, que es cierto para una variable, según 15-8, luego el teorema es cierto para polinomios de cualquier número de variables.

10. Transformación de expresiones algebraicas por el método de coeficientes indeterminados. — Como aplicación de la teoría anterior, se trata de resolver el problema siguiente: Dado un polinomio o expresión algebraica cualquiera, hallar otro polinomio que tenga una forma y grado prefijados, tal que sometido a ciertas operaciones, pueda transformarse en el primero.

Pondremos varios ejemplos:

EJEMPLO 1.°: Transformar $\sqrt{8 - \sqrt{15}}$ en una diferencia de raíces cuadradas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

$$\sqrt{8 - \sqrt{15}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$8 - \sqrt{15} = a + b - 2\sqrt{ab}$$

Será cierto si $\begin{cases} a + b = 8 \\ \sqrt{15} = 2\sqrt{ab} \end{cases} \Longrightarrow \quad a = \frac{15}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$

Por consiguiente:

$$\sqrt{8 - \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

EJEMPLO 2.º: Transformar $25x^2 - 64x + 145$ en la suma de dos cuadrados $(ax+b)^2 + (cx+d)^2$.

Desarrollemos y saquemos factor común,

$$(ax+b)^2 + (cx+d)^2 = (a^2+c^2)x^2 + (2ab+2cd)x + b^2 + d^2$$

Si igualamos los coeficientes tendremos

$$25 = a^2 + c^2 \quad \text{se satisface para } a = 4 \text{ y } c = 3$$

$$\left.\begin{aligned} -64 &= 2ab + 2cd \\ 145 &= b^2 + d^2 \end{aligned}\right\}$$

Luego:
$$\left.\begin{aligned} -64 &= 8b + 6d \\ 145 &= b^2 + d^2 \end{aligned}\right\} \text{ que se satisfacen para } b = 1 \text{ y } d = -12$$

La expresión pedida es:

$$(4x+1)^2 + (3x-12)^2$$

Evidentemente que existen otras soluciones.

16. Distribuciones bidimensionales y rectas de regresión

1. Variables estadísticas bidimensionales. — Las series estadísticas de una variable son conjuntos de valores, medidas u observaciones relativas a una sola variable, es decir, valores que estudian un carácter común a todos los miembros de una población; el peso de cada uno de los alumnos del Preuniversitario, por ejemplo.

Ahora bien, si en cada uno de los elementos consideramos dos caracteres simultáneamente, obtendremos dos series estadísticas, como por ejemplo, el peso y la talla de los citados alumnos. A estas series corresponderán dos variables estadísticas. Al mismo resultado llegaríamos si consideráramos el mismo carácter en dos poblaciones distintas, o uno distinto en cada una de ellas. Así, precios al por mayor y al por menor, precio del pan y jornales medios en un lapso de tiempo, etc. En todos estos casos, decimos que hemos obtenido *una variable estadística doble* o *una variable estadística bidimensional.*

Observemos que si consideramos un conjunto de valores de la misma sustancia, supuesta homogénea, podremos establecer dos series estadísticas, una con los pesos, x, y otra con los volúmenes, y.

Estas dos series vendrán representadas por la variable doble (x, y), caracterizada por ser constante en cada par de valores, la razón del peso al volumen.

En este caso diremos que entre las dos series existe una *dependencia funcional,* que aquí viene representada por $x : y = d$; es el mismo caso de la función matemática $y = f(x)$.

Supongamos por el contrario, que establecemos la serie estadística doble formada por el número de transeúntes que a las 12 h. de la mañana pasa por mi calle, a lo largo de un mes y el número diario de nacimientos registrados en la ciudad, durante el mismo período, podremos constatar una completa independencia entre ambas variables.

Pero entre estos casos extremos, la dependencia funcional y la completa independencia, en el mundo real encontramos numerosos ejemplos en los que la dependencia entre las variables estadísticas es intermedia, aunque no sea posible expresarla con una ley o fórmula matemática. Esta relación se denomina *dependencia estadística* o *estocástica.* Un ejemplo lo tendríamos en el número de personas fallecidas de tifus y el número de personas vacunadas contra esa enfermedad, en diversos períodos o en diversas poblaciones.

2. Tablas estadísticas y estudio gráfico. — Si consideramos los precios al por mayor y al por menor de varias mercancías, podremos ordenarlas como se indica en la tabla 16-1, y entonces se dice que se ha tabulado la variable bidimensional.

Artículos	Pesetas x_i	Pesetas y_i
Carne de ternera Kilo	36	90
Carne de cerdo Kilo	32	83
Naranjas Kilo	4	12
Patatas Kilo	1'10	2'50
Huevos docena	25	30

Tabla 16-1

Mercancía	N.° Obj.	N.° Obj.	Mercancía	N.° Obj.	N.° Obj.
n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	18	10	11	46	28
2	20	12	12	48	30
3	22	10	13	49	33
4	25	15	14	50	40
5	28	14	15	53	41
6	30	17	16	54	43
7	40	25	17	56	43
8	41	28	18	60	40
9	43	35	19	61	48
10	45	30	20	64	42

Tabla 16-2

Las dos últimas columnas de precios de la primera tabla, constituyen la serie estadística doble en la que la variable bidimensional (x, y) toma los valores (36, 90), (32, 83), (4, 12), (1'1, 2'5) y (25, 30).

Esto permite hacer una representación en ejes cartesianos de la variable, en forma de puntos, que se denomina *nube de puntos* o *diagrama de la dispersión* (figura 16-3).

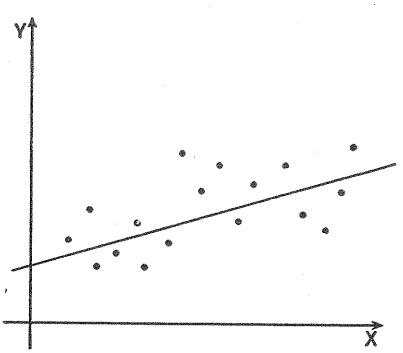


Fig. 16-3

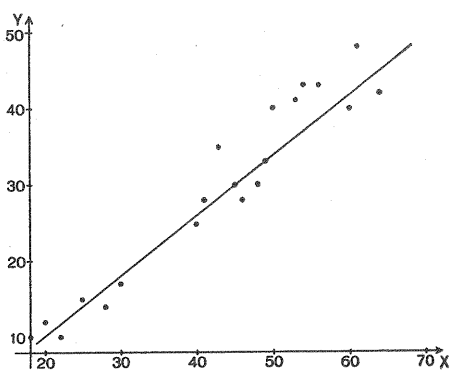


Fig. 16-4

Pongamos otro ejemplo: en dos almacenes, en un día determinado, se ha estudiado la venta de 20 artículos diferentes, como se indica en la tabla 16-2. Una vez ordenadas, llamando x al número de unidades vendidas en el primer almacén e y en el segundo, se tiene el resultado que puede verse en la tabla.

Los ejemplos aquí estudiados, al ser representados gráficamente, presentan una nube de puntos alargada, de modo que no es difícil trazar una recta que le sirva de eje. La razón de esta correspondencia se comprende, pues si un artículo es muy solicitado en un almacén, también lo será en el otro, es decir, que existe una marcada dependencia estadística entre ambas series.

Si hiciéramos la representación de la serie doble referida al peso y volumen de los cubos del número anterior, encontraríamos que los puntos representativos de la nube estarían sensiblemente en línea recta y al contrario, la nube que representa el número de transeúntes y nacimientos, aparecería sin que se pudiese notar ninguna tendencia, es decir, colocados completamente al azar en todo el plano.

El hecho de trazar la recta de los casos anteriores se denomina *ajustar una recta a una distribución dada.* Esto significa que la recta puede representar aproximadamente a la distribución bidimensional en lugar de la nube de puntos, con error relativamente pequeño.

3. Recta de regresión. — La palabra regresión es debida a Galton, que la propuso por primera vez al relacionar las tallas de padres e hijos y observar que cuando la talla del padre era superior o inferior a la media, también solía serlo la de los hijos, pero menos, lo cual significa que la talla de las sucesivas generaciones regresaba hacia la talla media de la raza.

Antes hemos podido observar que si entre las dos series que componen una variable bidimensional existe una gran relación, y además esta relación es sencilla, en la nube de puntos que los representa, es posible trazar una recta cuyos puntos constituyen una buena aproximación para representar la citada variable.

Pues bien, esta recta se denomina *recta de regresión de la variable* y *con relación a* x, o bien, *recta de estimación de* y *en* x.

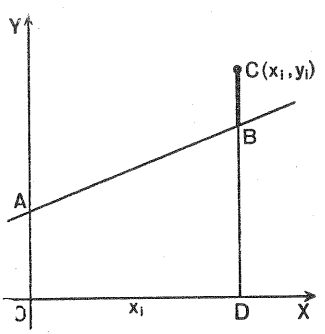


FIG 16-5

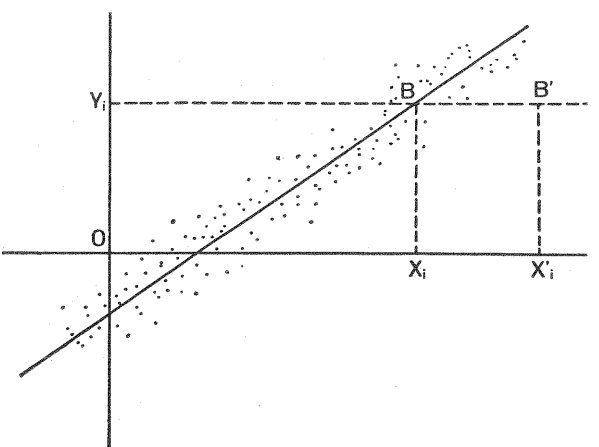


FIG. 16-6

Esto quiere decir que a los valores de x les asignamos no los valores de y que nos proporciona la nube, sino los que nos proporciona la recta, con lo que cometemos un pequeño error, que se desprecia, buscando en cambio la sencilla dependencia funcional que representa la recta. Así, en lugar de hacer corresponder a x_i (figura 16-5), y_i, se le asigna a y el valor *DB*.

Pero podemos, de una manera similar, idear otra recta tal que asignemos a x valores de los puntos de la recta que corresponda a los de la serie y, en lugar de los que debería corresponderle a partir de los puntos de la nube, estimando como buenas aproximaciones de estos valores, aquéllos.

Es decir, reemplazamos los puntos (x'_i, y_i) por (x_i, y_i) (fig. 16-6). *Esta última se denomina recta de regresión de la variable* x *con relación a la variable* y, *o bien, recta de estimación de* x *en* y.

Estas rectas, en general son distintas y no se confundirán más que en el caso de que x e y estén relacionadas por una dependencia funcional.

Ahora comprenderemos fácilmente que la dependencia entre dos caracteres, o *correlación,* es tanto más estrecha cuanto más «*próximas*» estén ambas rectas.

4. Medias y momentos de las distribuciones bidimensionales. — Como en las series bidimensionales existen dos variables, podremos definir dos medias aritméticas, que designaremos así:

$$a_x = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} \qquad \text{y} \qquad a_y = \frac{\Sigma y_i n_i}{\Sigma n_i} \qquad \text{[16-a]}$$

Podremos definir unas medias cuadráticas de la forma

$$\frac{\Sigma x_i^2 n_i}{\Sigma n_i} = a_2 \qquad \frac{\Sigma y^2 n_i}{\Sigma n_i} = b_2 \qquad \text{y por semejanza} \qquad \frac{\Sigma x_i y_i n_i}{\Sigma n_i} = a_{11}$$

Del mismo modo podremos definir las varianzas correspondientes a cada variable.

$$S_x^2 = \frac{\Sigma (x_i - a_x)^2 n_i}{\Sigma n_i} \qquad \text{y} \qquad S_y^2 = \frac{\Sigma (y_i - a_y)^2 n_i}{\Sigma n_i}$$

y por semejanza

$$S_{x,y} = \frac{\Sigma (x_i - a_x)(y_i - a_y) n_i}{\Sigma n_i} = m_{11}$$

Pero

$$S_x^2 = \frac{\Sigma (x_i - a_x)^2 n_i}{\Sigma n_i} = \frac{\Sigma x_i^2 n_i}{N} - 2a_x \frac{\Sigma x_i n_i}{N} + a_x^2 =$$

$$= a_2 - 2\frac{\Sigma x_i n_i}{N} \cdot \frac{\Sigma x_i n_i}{N} + a_x^2 = a_2 - a_x^2 \qquad \text{[16-b]}$$

E igualmente

$$S_{x,y} = m_{11} = \frac{\Sigma (x_i - a_x)(y_i - a_y) n_i}{N} = \frac{\Sigma x_i y_i n_i}{N} - a_y \frac{\Sigma x_i n_i}{N} - a_x \frac{\Sigma y_i n_i}{N} + a_x a_y =$$

$$= a_{11} - a_y a_x - a_x a_y + a_x a_y = a_{11} - a_x a_y \qquad [16\text{-b}']$$

A m_{11} se le denomina momento central de orden 11 de la variable bidimensional o covarianza de x e y. Es un caso particular de otro más general

$$m_{r,s} = \frac{1}{N} \Sigma n_i (x_i - a_x)^r (y_i - a_y)^s$$

que es el momento central de orden r, s.

5. Cálculo de las rectas de regresión. — Sea AB la recta de regresión de y sobre x, de una nube de puntos que representa una variable bidimensional (figura 16-5).

Dicha recta tiene por ecuación $y = bx + c$, siendo $C(x_i y_i)$ uno de los puntos de la nube y B el punto de la recta que tiene la misma abscisa x_i que C. El segmento CB representa la desviación de C sobre la recta, es decir, entre el valor observado DC y el valor estimado o calculado mediante la recta DB.

En resumen: $CB = y_i - bx_i - c$ y la suma de los valores absolutos de las desviaciones de todos los puntos será mínima cuando lo sea

$$\Sigma (y_i - bx_i - c)^2 n_i \qquad [16\text{-c}]$$

Si calculamos b y c en este caso, habremos hallado la ecuación de la recta que mejor representa la distribución bidimensional.

Pero observemos que si [16-c] ha de ser mínimo, sus derivadas con respecto a b y a c, han de ser nulas. Para derivar con respecto a b, consideremos a c constante y al derivar con respecto a c, consideremos a b constante; es lo que se dice hallar derivadas parciales. Así obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma [-2 n_i x_i (y_i - bx_i - c)] = 0 \\ \Sigma [-2 n_i (y_i - bx_i - c)] = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Sigma n_i y_i x_i - b \Sigma n_i x_i^2 - c \Sigma n_i x_i = 0 \\ \Sigma n_i y_i - b \Sigma n_i x_i - c \Sigma n_i = 0 \end{array}$$

Dividiendo por N

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} - b a_2 - c a_x = 0 \\ a_y - b a_x - c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_{11} - b(s_x^2 + a_x^2) - a_x a_y + b a_x^2 = 0 \\ c = a_y - b a_x \end{array} \qquad \text{según [16-b]}$$

$$\left.\begin{array}{l} c = a_y - b a_x \\ a_{11} - b s_x^2 - b a_x^2 - a_x a_y + b a_x^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_y = b a_x + c \\ b = \dfrac{a_{11} - a_x a_y}{s_x^2} \end{array}$$

La primera ecuación nos dice que la recta de regresión pasa por el punto (a_x, a_y), llamado centro de gravedad de la distribución bidimensional, y que tiene por coeficiente angular $b = \dfrac{m_{11}}{s_x^2}$, que se llama coeficiente de regresión de y sobre x, y se representa por $b_{y,x}$ en el que $m_{11} = a_{11} - a_x a_y$.

La ecuación buscada es, pues,

$$y - a_y = \frac{m_{11}}{s_x^2}(x - a_x)$$

De igual manera, cambiando entre sí las variables x e y, y partiendo de la figura 16-6, se obtiene la ecuación de la recta de regresión de x sobre y

$$x - a_x = \frac{m_{11}}{s_y^2}(y - a_y)$$

cuyo coeficiente de regresión de las x sobre las y es $b_{x,y} = \dfrac{m_{11}}{s_y^2}$

Utilización de estas fórmulas para representar las rectas de regresión.

En la tabla consideramos sólo 10 mercancías y sus precios al por menor y al por mayor ordenados así:

MERCANCÍAS	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	18	10	324	100	180
2	20	12	400	144	240
3	22	10	484	100	220
4	25	15	625	225	375
5	28	14	784	196	392
6	30	17	900	289	510
7	40	25	1600	625	1000
8	41	28	1681	784	1148
9	43	35	1849	1225	1505
10	45	30	2025	900	1350
	$\Sigma x_i = 312$	$\Sigma y_i = 196$	$\Sigma x_i^2 = 10672$	$\Sigma y_i^2 = 4588$	$\Sigma x_i y_i = 6920$

TABLA 16-7

$$a_x = \frac{312}{10} = 31'2 \qquad a_y = \frac{196}{10} = 19'6$$

$$m_{11} = \frac{6920}{10} - 31'2 \times 19'6 = 80'48$$

$$s_x^2 = \frac{10672}{10} - 31'2^2 = 93'76 \qquad b_{y,x} = \frac{80'48}{93'76} = 0'85$$

$$s_y^2 = \frac{4588}{10} - 19'6^2 = 74'64 \qquad b_{x,y} = \frac{80'48}{74'64} = 1'07$$

Recta de regresión de y sobre x: $y - 19'6 = 0'85(x - 31'2)$

Recta de regresión de x sobre y: $x - 31'2 = 1'07(y - 19'6)$

17. Correlación. Coeficiente de correlación

1. Definiciones. — *Correlación de dos variables estadísticas es el grado de dependencia estadística que entre ellas existe.* Esta dependencia, o mejor el grado de dependencia se le representa mediante un número que se llama *coeficiente de correlación,* independiente de la clase de unidades empleadas.

Se ha visto en la lección anterior, que la dependencia mutua de las dos variables estadísticas de los ejemplos, denominada dependencia *estocástica,* se le ha podido reemplazar, sin gran error, por una dependencia funcional lineal, representada por una de las rectas de regresión. Esta última se denomina *dependencia estimada,* que puede ser no lineal y entonces viene representada por una curva determinada.

Cuando la dependencia estimada es lineal, entonces el coeficiente de correlación se dice *lineal y se le define como la raíz cuadrada del producto de las pendientes de las dos rectas de regresión,* y se le suele representar por r.

Por consiguiente,

$$r^2 = b_{y,x} \cdot b_{x,y} = \frac{m_{11}^2}{S_x^2 \cdot S_y^2}$$

y de aquí

$$r = \frac{m_{11}}{S_x S_y} = \frac{\Sigma (x_i - a_x)(y_i - a_y) n_i}{N S_x S_y} \qquad [17\text{-a}]$$

Esta fórmula es simétrica en x e y, lo que permite cambiar x por y, y viceversa, sin que se modifique r, lo cual prueba la reversibilidad de la dependencia o relación entre las variables x e y.

Puesta así

$$r = \frac{1}{N} \Sigma \frac{x_i - a_x}{S_x} \cdot \frac{y_i - a_y}{S_y} n_i$$

se observa que $\frac{x_i - a_x}{S_x}$ y $\frac{y_i - a_y}{S_y}$ representan las desviaciones de x e y respecto a la correspondiente media aritmética, medidas con su respectiva desviación típica y por consiguiente r aparece como la media aritmética de los productos de las desviaciones respecto a las respectivas medias aritméticas. Es pues una media de las fluctuaciones de las variables.

Es más, el modo de obtener las ecuaciones de las rectas de regresión nos autoriza a considerar que r está calculada a base de ser mínimas las fluctuaciones de las variables.

2. Estudio del coeficiente de correlación. — La recta de regresión de y sobre x,

$$y - a_y = b_{y,x}(x - a_x),$$

sabemos que pasa por el punto (a_x, a_y). Tomemos este punto como origen y entonces la ecuación será $y = bx$, en la que pondremos b en lugar de $b_{y,x}$ y como A es un punto de la nube, resulta (fig. 17-1),

$$AB = y_i - bx_i$$

La suma de los cuadrados para todos los puntos de la nube

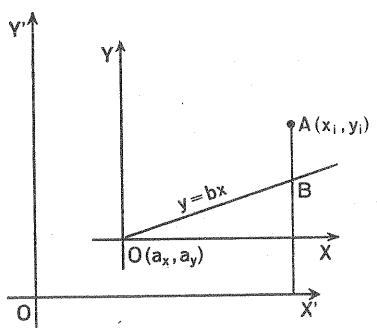


FIG. 17-1

$$\Sigma n_i AB^2 = \Sigma n_i (y_i - bx_i)^2 =$$
$$= \Sigma y_i^2 n_i - 2b \Sigma x_i y_i n_i + b^2 \Sigma n_i x_i^2$$

Pero según hemos visto

$$\Sigma y_i^2 n_i = N s_y^2 \quad \text{puesto que} \quad a_y = 0$$

y por lo mismo

$$\Sigma x_i y_i n_i = N m_{11} \qquad \text{y} \qquad \Sigma n_i x_i^2 = N S_x^2$$

se tiene

$$\Sigma n_i AB^2 = \Sigma (y_i - bx_i)^2 n_i = N S_y^2 - 2bN m_{11} + b^2 N S_x^2 =$$
$$= N S_y^2 - 2N \frac{m_{11}^2}{S_x^2} + N \frac{m_{11}^2}{S_x^2} = N S_y^2 \left(1 - \frac{m_{11}^2}{S_y^2 S_x^2}\right)$$

$$\text{pues,} \quad b_{y,x} = \frac{m_{11}}{S_x^2}$$

Pero según vimos:

$$r^2 = \frac{m_{11}^2}{S_y^2 S_x^2}, \text{ que reemplazado queda}$$

$$\Sigma \overline{AB}^2 n_i = \Sigma (y_i - bx_i)^2 n_i = N s_y^2 (1 - r^2) \qquad [17\text{-b}]$$

El valor de r así definido es el coeficiente de correlación, indica el grado de interdependencia estocástica de las variables. En efecto, por ser el primer miembro de [17-b] positivo, lo mismo que $N s_y^2$, resulta $r^2 \leq 1$, o bien

$$-1 \leq r \leq 1$$

Si $r = 1$ ó $r = -1 \longrightarrow \Sigma AB^2 n_i = 0 \longrightarrow AB = 0$ los puntos $A(x_i y_i)$ pertenecen a la recta de regresión y como AB indica la separación de los puntos con la recta, en este caso la dependencia es completa.

En los demás casos es fácil ver que cuanto más se acerque r^2 a la unidad, menor será $\Sigma AB^2 n_i$, lo que quiere decir, que menos se separan los puntos de la recta.

Podremos hallar r mediante las fórmulas, teniendo en cuenta [17-a]

$$b_{y,x} = \frac{m_{11}}{s_x^2} = r\frac{s_y}{s_x} \quad \text{y} \quad b_{x,y} = \frac{m_{11}}{s_y^2} = r\frac{s_x}{s_y} \qquad r = \sqrt{b_{y,x} \cdot b_{x,y}}$$

Si $r = 0 \longrightarrow b_{y,x} = b_{x,y} = 0$, entonces las variables son incorrelacionadas y la recta de regresión de y sobre x es paralela al eje de abscisas, y la de x sobre y paralelas al eje de ordenadas.

Si $r > 0$ los coeficientes $b_{y,x} > 0$ y $b_{x,y} > 0$, al crecer x crece y, y la regresión se llama directa y al contrario, si $r < 0$, entonces $b_{y,x} < 0$, $b_{x,y} < 0$, al crecer x disminuye y, por lo que la regresión es inversa o negativa.

3. **Cálculo del coeficiente de correlación.** — La fórmula será:

$$r = \frac{\dfrac{\Sigma (x_i - a_x)(y_i - a_y) n_i}{N}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma (x_i - a_x)^2 n_i}{N} \cdot \dfrac{\Sigma (y_i - a_y)^2 n_i}{N}}} = \frac{\Sigma (x_i - a_x)(y_i - a_y) n_i}{\sqrt{\Sigma (x_i - a_x)^2 n_i \; \Sigma (y_i - a_y)^2 n_i}}$$

Tratemos de hallar el coeficiente de correlación de los valores x, ventas al por menor y los valores y, ventas al por mayor. Dispongámoslo de la siguiente manera:

x_i	y_i	n_i	$x_i n_i$	$y_i n_i$	$x_i - a_x$	$y_i - a_y$	$(x_i - a_x)^2 n_i$	$(y_i - a_y)^2 n_i$	$(x_i - a_x)(y_i - a_i) n_i$
52	46	2	104	92	26'14	26'95	1366'59	1452'60	1408'94
47	38	3	141	114	21'14	18'95	1340'69	1077'30	1201'80
42	39	5	210	195	16'14	19'95	1302'49	1990'01	1609'96
35	26	1	35	26	9'14	6'95	83'53	48'30	63'52
31	20	4	124	80	5'14	0'95	105'67	3'61	19'53
25	20	1	25	20	−0'86	−0'95	0'73	0'90	0'81
24	20	7	168	140	−1'86	−1'05	24'21	7'71	13'67
22	16	5	110	80	−3'86	−3'05	74'49	46'51	58'86
21	14	2	42	28	−4'86	−5'05	47'23	51	49'08
20	13	8	160	104	−5'86	−6'05	274'71	292'82	283'62
20	10	6	120	60	−7'86	−9'05	370'67	491'41	226'79
18	9	4	72	36	−10'86	−10'05	471'75	404'01	436'57
12	7	5	60	35	−13'86	−12'05	1344'69	1016'41	1169'09
		$53 = \Sigma n_i = N$	$1371 = \Sigma x_i n_i$ $a_x = \frac{1371}{53}$ $a_x = 25'86$	$1010 = \Sigma y_i n_i$ $a_y = \frac{1010}{53}$ $a_y = 19'05$			$6610'45 = \Sigma (x_i - a_x)^2 n_i$	$6882'59 = \Sigma (y_i - a_y) n_i$	$6542'24 = \Sigma (x_i - a_x)(y_i - a_y) n_i$

TABLA 17-2

$$r = \frac{6542'24}{\sqrt{6610'45 \times 6882'59}} = \frac{6542'24}{6745'14} = 0'969$$

18. Traslaciones en el plano

1. Definición. — *Dado un vector libre* $\vec{V}$, *no nulo, llamaremos traslación definida por este vector* $\vec{V}$, *a una transformación puntual por la que a un punto* P *de una figura* (F) *le hacemos corresponder un punto* P′ *de* (F′), *de modo que para cualquier par de puntos homólogos se verifique:*

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{V}$$

Es decir, si hacemos coincidir el origen de los vectores pertenecientes a la clase $\vec{V}$, con cada uno de los puntos de la figura (*F*), los extremos determinan la figura (*F′*) homóloga de (*F*) (fig. 18-1).

Esta transformación no admite, como se ve fácilmente, puntos dobles a distancia finita. Pero si $\vec{V} = \vec{0}$, cada punto coincide con su homólogo y tenemos la identidad.

La transformación inversa es también una traslación definida por el vector $-\vec{V}$ opuesto del $\vec{V}$.

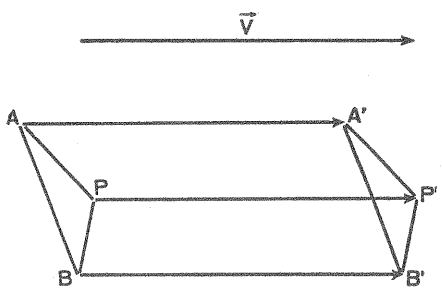


FIG. 18-1

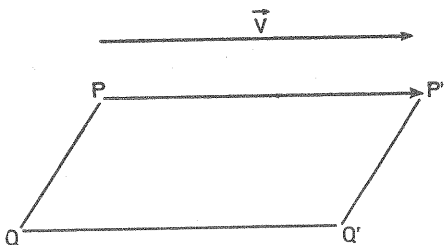


FIG. 18-2

2. Teorema. — *La condición necesaria y suficiente para que una transformación puntual sea una traslación, es que el vector* $\overrightarrow{PQ}$ *determinado por dos puntos cualesquiera de* (F) *sea equipolente al* $\overrightarrow{P'Q'}$, *siendo estos puntos los homólogos de* P *y* Q *en la transformación.*

Consideremos dos puntos *P* y *Q* y sus homólogos *P′* y *Q′* en la traslación definida por el vector $\vec{V}$ (fig. 18-2).

Se tiene por definición $\overrightarrow{PP'} = \vec{V}$ y $\overrightarrow{QQ'} = \vec{V}$, es decir: $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$; por consiguiente, los puntos P, P', Q y Q' forman un paralelogramo y los lados opuestos PQ y $P'Q'$ son iguales y paralelos.

Recíprocamente, supongamos que dos figuras (F) y (F') se corresponden de forma que dos puntos cualesquiera P y Q de (F) tengan como homólogos los P' y Q' de (F') tales que se verifique

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$$

Esto nos dice que PQ, $P'Q'$ son los lados opuestos de un paralelogramo y por consiguiente

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \vec{V} = \text{constante}$$

Se trata, pues, de una traslación.

3. Producto de *n* traslaciones. — *El producto de* n *traslaciones es otra traslación que está definida por el vector suma vectorial de los vectores que definen las traslaciones dadas.*

Sean n vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}_4$, ... y $\vec{V}_n$, que definen las traslaciones T_1, T_2, T_3, T_4, ... y T_n, y consideremos los puntos M y N de la figura (F). La traslación T_1 los transformará en M_1 y N_1 de la figura (F_1) homóloga de (F); la traslación T_2 transforma a su vez los M_1, N_1, en los M_2, N_2 de (F_2), homólogos de (F_1), etc. Finalmente, la traslación T_n transformará los puntos M_{n-1}, N_{n-1} en los puntos M_n, N_n de (F_n), homóloga de (F_{n-1}).

En virtud del teorema anterior, podemos escribir:

$$\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}$$
$$\overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overrightarrow{M_nN_n} = \overrightarrow{M_{n-1}N_{n-1}} = \overrightarrow{M_{n-2}N_{n-2}} = \ldots = \overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}$$

Lo que demuestra que la figura (F_n) se deduce de la (F) por la sola traslación que transforma M en M_n y N en N_n.

Ahora bien:

$$\overrightarrow{MM_n} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_3M_4} + \ldots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n}$$

o lo que es lo mismo

$$\overrightarrow{MM_n} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \ldots + \vec{V}_n$$

Esto lo expresaremos abreviadamente así:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \ldots T_n = T$$

En el caso de que esta suma sea el vector $\vec{0}$, tendremos la identidad.

Siendo la suma vectorial una operación que goza de las propiedades asociativa y conmutativa, también poseerá estas propiedades el producto de cualquier número, *n*, de traslaciones. Teniendo en cuenta, además, que la transformación inversa es una traslación y que figura la transformación unidad, podemos afirmar que el conjunto de todas las traslaciones del plano forman un *grupo abeliano.*

4. Figuras homólogas de otras al aplicarles una traslación. — 1.° *Vector.* Dado un vector $\overrightarrow{AB}$, si A' y B' son los homólogos de A y B en la traslación T_v, se verifica por el teorema fundamental:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB};$$

por consiguiente, *el transformado de un vector es otro vector equipolente* (figura 18-3), o bien, *en una traslación, un segmento se transforma en otro igual.*

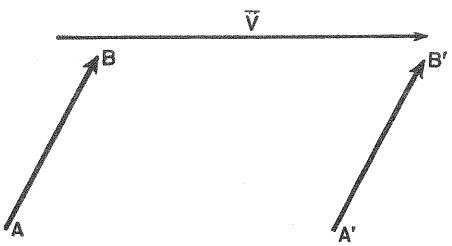


FIG. 18-3

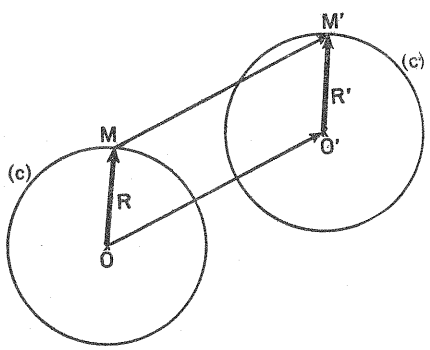


FIG. 18-4

2.° *Las traslaciones son correspondencias biunívocas,* pues para que dos vectores de la clase $\vec{V}$ que la definen, tengan los extremos coincidentes, ambos vectores han de ser idénticos.

3.° *Semirrecta.* El razonamiento precedente es verdadero, cualquiera que sea la longitud de $\overrightarrow{AB}$; por consiguiente, la transformada de una semirrecta es otra semirrecta de la misma dirección y sentido.

4.° *Recta.* Si la recta dada *r* es paralela al vector $\vec{V}$ que nos define la traslación, su transformada *r'* coincide con ella. Es decir, la recta queda invariante en conjunto, pero los puntos se transforman en puntos de la misma recta que no coinciden con sus homólogos. Los pares de puntos homólogos determinan segmentos iguales, cuya longitud es igual al vector $\vec{V}$.

Si la recta r tiene distinta dirección que $\vec{V}$, su transformada r' es paralela a ella, ya que a cualquier vector sobre r le corresponde un vector equipolente sobre r'. Podemos pues afirmar, que la transformada de una recta es otra recta de la misma dirección.

5.° *Ángulo. En la traslación se conservan los ángulos,* puesto que los lados del transformado son paralelos a los del ángulo primitivo.

Por consiguiente, la traslación es una transformación *de congruencia,* o conforme.

6.° *Circunferencia.* Sea (C) una circunferencia de centro O y radio R, y M un punto cualquiera de (C). Si O' y M' son los transformados de O y M respectivamente, se verificará (fig. 18-4):

$$\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM} = \vec{R}$$

Luego M' pertenece a la circunferencia de radio R y centro O'.

5. Expresión analítica de la traslación. — Elegido un sistema de referencia Ox, Oy (fig. 18-5), si el vector $\vec{V}$ que define la traslación tiene de coordenadas (a, b), la traslación queda determinada; y dado un punto P, de la figura (F) de coordenadas (x, y) su transformado tendrá de coordenadas $(x + a, y + b)$, y las ecuaciones de la traslación serán:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned}$$

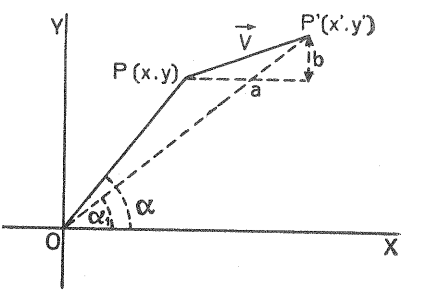


FIG. 18-5

Esto mismo se puede expresar mediante complejos afijos de los vectores. Así, sean los afijos de $\overrightarrow{OP}$, V y $\overrightarrow{OP'}$, respectivamente

$$\overrightarrow{OP'} = x' + y'i, \quad \vec{V} = a + bi \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OP} = x + yi$$

Se puede poner (fig. 18-5),

$$\overrightarrow{OP'} = \vec{V} + \overrightarrow{OP} = (a+x) + (b+y)i = x' + y'i \qquad \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases} \qquad [18\text{-a}]$$

que representa la traslación definida por el vector $\vec{V}$.

Producto de dos traslaciones. Supongamos dos traslaciones definidas por los vectores

$$\vec{V} = a + bi \qquad \text{y} \qquad \vec{V}' = a' + b'i$$

Si los aplicamos sucesivamente a la figura F, se obtendría primero F' y luego F'', de modo que siendo $\vec{V} + \vec{V}' = a + a' + (b+b')\,i$ y $P(x, y)$ un punto de F y $P''(x', y')$ su transformado en F'', teniendo en cuenta [18-a], se podrá poner

$$x' = (a+a') + x$$
$$y' = (b+b') + y$$

fórmulas que definen el producto de las dos traslaciones.

19. Los giros en el plano

1. Definición. — *Dado un punto fijo* O *del plano, y un ángulo orientado* α (figura 19-1), *llamaremos giro a la transformación puntual que deja invariante este punto* O, *y a otro punto cualquiera* P *del plano le hace corresponder un punto* P', *tal que se verifican las relaciones siguientes:*

$$OP = OP' \qquad [19\text{-a}]$$

$$\text{ang. } POP' = \alpha \qquad [19\text{-b}]$$

El punto O se llama *centro de giro* y el ángulo α, *ángulo de giro.*

El transformado de P es único y determinado. El punto O es el único punto doble de la transformación. La transformación inversa es también un giro, su centro es O, y el ángulo de giro $-\alpha$.

Si $\alpha = 0$, entonces el giro es la unidad, pues produce la identidad.

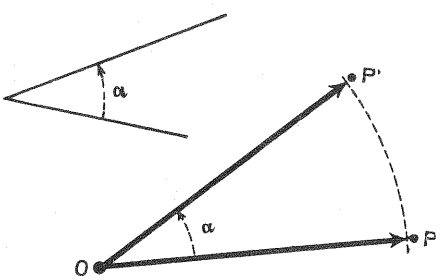


FIG. 19-1

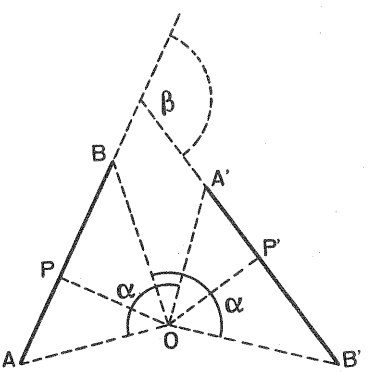


FIG. 19-2

2. Teorema. — *La condición necesaria y suficiente para que una transformación puntual sea un giro de centro* O *y ángulo de giro* α, *es que a dos puntos cualesquiera* A, B, *correspondan dos puntos* A', B', *tales que los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *tengan el mismo módulo, y el ángulo que forman sea constante e igual a* α.

En efecto, consideremos (fig. 19-2), dos puntos cualesquiera A y B de la figura F y sus homólogos A' y B', obtenidos por un giro de centro O y ángulo α. Se tiene por definición de giro

$$\widehat{AOA'} = \alpha = \widehat{BOB'}$$

Restando de ambos ángulos BOA', queda en los triángulos AOB y $A'OB'$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \\ AO = OA' \\ OB = OB'\end{array}\right\} \text{ por hipótesis } \Bigg\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{A'OB'} \Longrightarrow AB = A'B'$$

Es decir, los segmentos homólogos son iguales.

Sean P y P' los pies de las alturas de ambos triángulos. Los triángulos se les puede hacer coincidir mediante un giro de amplitud α y por consiguiente las alturas también coincidirán. Esto nos permite afirmar que OP' es homólogo en el giro de OP, y por tanto

$$\text{áng. } (OP,\ OP') = \alpha \Longrightarrow \text{áng. } (AB,\ A'B') = \beta = \alpha$$

por ser ángulos de lados perpendiculares.

Recíprocamente. Supongamos que dos figuras F y F' (fig. 19-3) se corresponden de modo que dos puntos cualesquiera A y B de F, tengan por transformados a A' y B' de F' con la condición de que

$$AB = A'B' \qquad \text{y} \qquad \text{áng. } (AB,\ A'B') = \alpha \text{ constante.}$$

Probaremos que esta transformación es un giro:

Trácese MO, mediatriz de AA' y el arco capaz de α correspondiente a AA' y entonces el giro de centro O y amplitud α hace coincidir A con A', AB con $A'B'$, pues

$$OA = OA' \qquad \text{y} \qquad \text{áng. } (OA,\ OA') = \alpha \text{ constante.}$$

y además AB girará el ángulo α según el teorema directo. Por consiguiente, la transformación es un giro. Obsérvese que otro punto cualquiera M de F coincidirá con M' de F' si áng. $(AM,\ A'M') = \alpha$ y $AM = A'M'$ como debe ser por hipótesis, pues A coincide con A' y AM gira un ángulo α.

Obsérvese que el centro O se puede también determinar trazando PO, bisectriz de LPA'. En efecto

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{OPAM} = \widehat{OA'M} \\ \widehat{AM} = \widehat{MA'}\end{array}\right\} \text{ Restando m. a m. } \Longrightarrow \widehat{OPA} = \widehat{OA'}$$

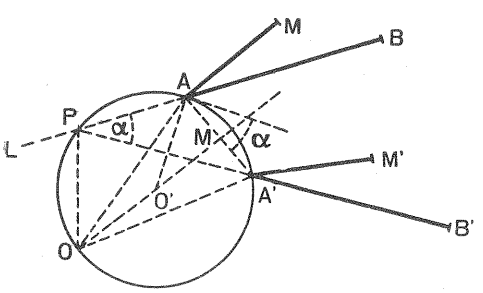


FIG. 19-3

$$\frac{\widehat{OP} + \widehat{PA}}{2} = \frac{\widehat{OA'}}{2} \Longrightarrow \widehat{LPO} = \widehat{OPA'}$$

Luego, *dados dos segmentos iguales, existe un giro de centro a distancia finita (o infinita si son paralelos) que transforma el primero en el segundo.*

3. Construcciones del centro de giro. — 1.° Si $AB = A'B'$ (fig. 19-4), el centro de giro que transforma AB en $A'B'$ está determinado por la intersección de las mediatrices de AA' y BB'. Si AA' y BB' son paralelas, el centro de giro será la intersección de las rectas que contienen a los segmentos AB y $A'B'$ (fig. 19-5), según el teorema anterior.

Si los segmentos homólogos son paralelos, el centro se encuentra a distancia infinita, y el giro se reduce a una traslación definida por el vector $\overrightarrow{AA'}$.

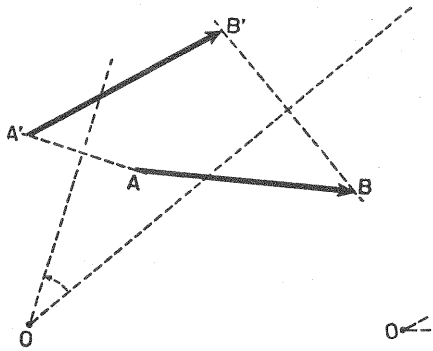


FIG. 19-4

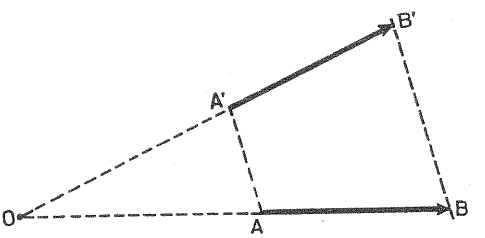


FIG. 19-5

2.° El centro de giro que transforma dos semirrectas homólogas Aa, $A'a'$ (figura 19-6) está sobre la mediatriz del segmento AA' con la recta PO, que contiene la bisectriz del ángulo definido por interferencia de semiplanos correspondientes. La construcción falla cuando estas rectas coinciden, en cuyo caso el centro es la intersección de las perpendiculares a las semirrectas en los orígenes (fig. 19-7).

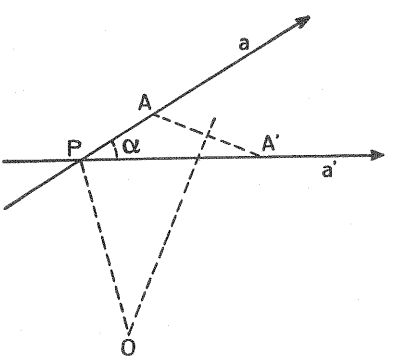


FIG. 19-6

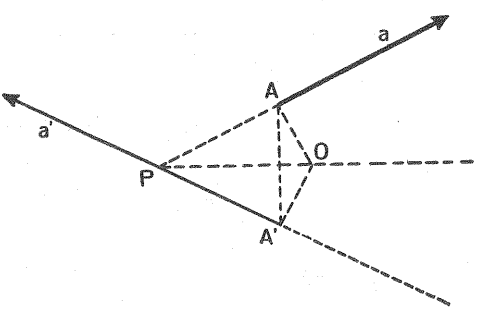


FIG. 19-7

4. Propiedades de los giros. — 1.ª *Los giros transforman puntos alineados en puntos alineados.*

En efecto, sean A, B y C tres puntos alineados de la figura F, que se transforman por un giro en A', B' y C', pertenecientes a F'. Se podrá poner, puesto que los primeros están alineados, que

$$AB + BC = AC$$

y como por (19-2)

$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AB + AC = A'B' + B'C'$$

$$AC = A'C' \Longrightarrow AC = AB + BC = A'B' + B'C' = A'C'$$

que es lo que se quería demostrar.

2.ª *Los giros transforman triángulos en triángulos directamente iguales,* pues los lados de un triángulo y el transformado son iguales y además igualmente dispuestos.

3.ª *Los giros transforman ángulos en ángulos iguales,* pues tomado un punto en cada lado y sus homólogos, se obtienen dos triángulos iguales.

4.ª Igualmente, *un giro transforma una semirrecta en otra semirrecta no paralela, una circunferencia en otra circunferencia de radio igual al de aquélla.*

5.ª *Los giros de amplitud* π *se denominan simetrías centrales.*

6.ª *Conserva el sentido del plano, como es fácil ver.*

5. Producto de dos giros. — a) *El producto de dos giros* G_{α_1} *y* G_{α_2} *del mismo centro es otro giro del mismo centro.*

En efecto, si A y B son dos puntos de F y A' y B' sus homólogos respectivos en el giro de centro O y pertenecientes a la figura F', según el teorema 19-2, se tiene por G_{α_1}

$$\left.\begin{matrix} OA = OA' \\ OB = OB' \end{matrix}\right\} \text{ y áng. } (OA,\ OA') = \text{áng. } (OB,\ OB') = \alpha_1, \text{ constante}$$

Por G_{α_2} A' y B' se transforman en A'' y B'', respectivamente, pertenecientes a F'', de modo que

$$\left.\begin{matrix} OA' = OA'' \\ OB' = OB'' \end{matrix}\right\} \text{ y áng. } (OA',\ OA'') = \text{áng. } (OB',\ OB'') = \alpha_2, \text{ constante}$$

De ambas relaciones resulta

$$\left.\begin{matrix} OA = OA'' \\ OB = OB'' \end{matrix}\right\} \text{ y áng. } (OA,\ OA'') = \text{áng. } (OB,\ OB'') = \alpha_1 + \alpha_2, \text{ constante}$$

que es la condición para que la transformación de F en F'' sea un giro G_α. Luego para un centro único O, se tiene

$$G_\alpha = G_{\alpha_1} G_{\alpha_2} = G_{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Pero además, a todo giro G_α, corresponde otro giro $G_{-\alpha}$ opuesto, tal que

$$G_\alpha \cdot G_{-\alpha} = G_0 \quad \text{la identidad}$$

Por otra parte

$$G_{\alpha_1}G_{\alpha_2} = G_{\alpha_2}G_{\alpha_1} \qquad \text{y} \qquad (G_{\alpha_1}G_{\alpha_2})\,G_{\alpha_3} = G_{\alpha_1}\,(G_{\alpha_2}G_{\alpha_3})$$

pues los giros resultantes tienen el mismo centro y además la misma amplitud

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \quad \text{o bien} \quad (\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2+\alpha_3)$$

Podemos, pues, afirmar que los giros concéntricos forman grupo abeliano.

b) *El producto de dos giros de distinto centro es otro giro.*

En efecto, sea la figura F, a la que le aplicamos el giro de centro O_1 y amplitud α_1, por lo que se transforma en F'. Otro giro de centro O_2 y amplitud α_2 transforma F' en F''.

Tomemos dos puntos cualesquiera A y B de F, sus homólogos en F' sean A' y B' y sus correspondientes en F'' sean A'' y B''. Así se ha de verificar que

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ A'B' = A''B'' \end{array}\right\} \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} \text{ang. } (AB,\ A'B') = \alpha_1 \\ \text{ang. } (A'B',\ A''B'') = \alpha_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} AB = A''B'' \\ \text{ang. } (AB,\ A'B') = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{constante} \end{array}$$

lo que nos demuestra que la transformación de F en F', o el producto de dos giros de distinto centro, es otro giro.

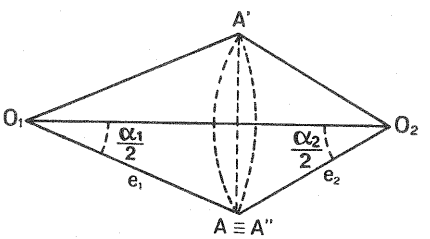


FIG. 19-8

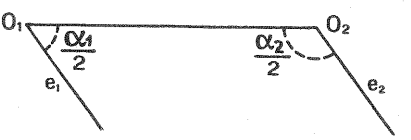


FIG. 19-9

Veamos *cómo se determina el centro de giro.* El centro es un punto doble de modo que si es A, deberá satisfacer a las siguientes relaciones (fig. 19-8),

A se transforma en A' mediante G_1 y
A' se transforma en $A'' \equiv A$ mediante G_2

$$\left.\begin{array}{l} O_1A = O_1A' \\ O_2A' = O_2A \end{array}\right\} \Longrightarrow A'AO_2 \text{ y } A'AO_1 \text{ son triángulos isósceles}$$

Por consiguiente

$$\left.\begin{array}{l} AO_1O_2 = \frac{1}{2}AO_1A' \\ AO_2O_1 = \frac{1}{2}AO_2A' \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{se obtiene el centro } A \text{ por la intersección de } e_1 \text{ y } e_2,$$

de modo que formen con O_1O_2 respectivamente los ángulos $\frac{\alpha_1}{2}$ y $\frac{\alpha_2}{2}$.

Si invertimos el orden de los factores o giros, no obtendríamos por centro a A, por lo que el producto de dos giros no concéntricos no es conmutativo.

Por otra parte, si $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \pi$ o múltiplo de π, resulta que el centro se aleja al infinito y entonces $G_{\alpha_1} G_{\alpha_2}$ es una traslación, como veremos más adelante.

6. Intersección de los pares de rectas homólogas en dos haces iguales. — *Dos haces son iguales si se corresponden de modo que los rayos homólogos forman ángulos iguales.*

Sean B y B' dos haces iguales. Si r y r' son dos rectas cualesquiera homólogas, el ángulo $C = \alpha = (\widehat{r, r'})$ es constante, por consiguiente los puntos C se encuentran en el arco capaz del ángulo α correspondiente al segmento BB'.

Obsérvese: 1.° Que el rayo BB' perteneciente a B tiene por homólogo a t', con el que forman el ángulo α y al contrario, BB' como perteneciente al haz B', tiene por homólogo a t.

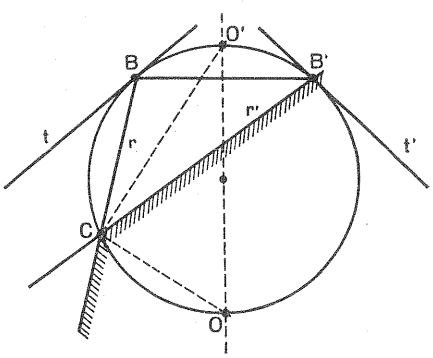


FIG. 19-10

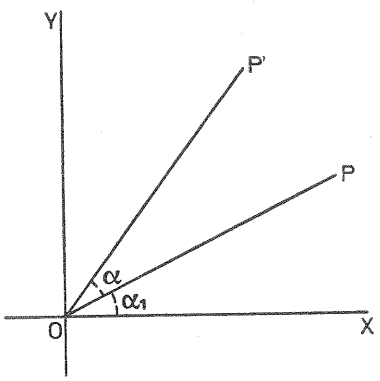


FIG. 19-11

2.° Trazando la mediatriz $O'O$ a BB', obtenemos dos puntos O y O', que son dos centros de giro, que transforman un haz en otro, y cuyas amplitudes son, respectivamente, α y $\pi - \alpha$; efectivamente

$$OB = OB' \quad \text{y} \quad \text{áng. } (OB, OB') = \alpha \text{ constante}$$
$$O'B = O'B' \quad \text{y} \quad \text{áng. } (O'B, O'B') = \pi - \alpha \text{ constante}$$

Recíprocamente: *si tenemos dos puntos* B *y* B′ *en una circunferencia y unimos cualquier punto de la misma con* B *y* B′, *obtendremos rayos homólogos de dos haces iguales, pues los ángulos formados por* r *y* r′ *serán constantes.*

Esto nos autoriza a decir que *el lugar geométrico de las intersecciones de pares de rayos homólogos de dos haces iguales es una circunferencia.*

7. Expresión analítica de los giros. — Supongamos que la figura F se transforma en F' mediante un giro, se trata de expresar las coordenadas de un punto $P'(x', y')$ cualquiera de F' en función de las coordenadas de su homólogo $P(x, y)$.

a) *El centro de giro es el origen de coordenadas* O. El vector $\overrightarrow{OP}$ tiene por afijo $x + yi = P_{\alpha_1}$ y mediante el giro de centro O y amplitud α se transforma en el vector $\overrightarrow{OP'}$, cuyo afijo es $x' + y'i = P_{(\alpha_1+\alpha)}$

Si 1_α es un número complejo unimodular, al multiplicarle por P_{α_1} obtendremos otro complejo del mismo módulo y cuyo argumento es la suma $\alpha_1 + \alpha$, de los argumentos, es decir, el transformado de $\overrightarrow{OP}$ en el giro de amplitud α, que hemos llamado $\overrightarrow{OP'}$. Por consiguiente

$$\left.\begin{array}{l} P_{\alpha_1} = x + yi \\ 1_\alpha = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \text{ multiplicando m. a m., resulta}$$

$$P_{(\alpha_1+\alpha)} = x' + y'i = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + i\,(x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)$$

De donde deducimos las fórmulas de transformación que nos permiten pasar de F a F'

$$\left.\begin{array}{l} x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{array}\right. \qquad [19\text{-c}]$$

b) *El centro de giro es el punto* $O_1 \equiv a + bi$. Puesto que (fig. 19-12)

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO_1}$$

o bien $\quad P_{\alpha_2} = P_{\alpha_1} - O_{1\beta}$

el punto P tendrá por afijo respecto a los ejes paralelos x', y' y cuyo origen sea O_1, $P_{\alpha_2} = x - a + (y-b)\,i$, lo cual nos permite poner, como antes,

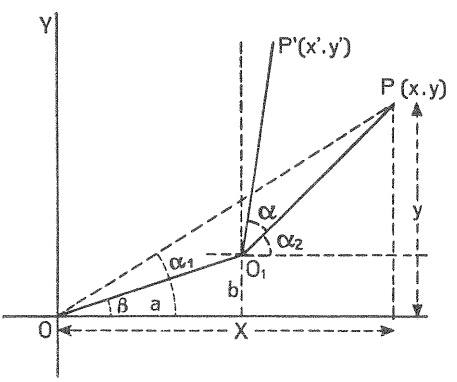


FIG. 19-12

$$\left.\begin{array}{l} P_{\alpha_2} = (x-a) + (y-b)\,i \\ 1_\alpha = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \text{ multiplicando m. a m., resulta}$$

$$\overrightarrow{O_1P'} = P_{\alpha_2+\alpha} = (x-a)\cos\alpha - (y-b)\operatorname{sen}\alpha + i\,[(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha] =$$

$$= x' - a + (y'-b)\,i$$

siendo x' e y' las coordenadas de P' respecto a los ejes x, y.

Por consiguiente, las fórmulas que nos permiten pasar de F a F', serán

$$\left.\begin{array}{l} x' = a + (x-\alpha)\cos\alpha - (y-b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = b + (x-\alpha)\operatorname{sen}\alpha + (y+b)\cos\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OP'} = (P_{\alpha_1} - O_{1\beta})\,1_\alpha + O_{1\beta} = P_{\alpha_3} \qquad [19\text{-d}]$$

c) Producto de dos giros. Si en [19-d] suponemos que P_{α_1} es el transformado de M_6 en un giro de centro O_2 y amplitud α', si OO_2 forma un ángulo γ con el eje de abscisas, se tiene:

$$P_{\alpha_1} = (M_6 - O_{2\gamma})\, 1_{\alpha'} + O_{2\gamma}$$

que al aplicarlo a [19-d], resulta

$$P_{\alpha_3} = [(M_6 - O_{2\gamma}) \cdot 1_{\alpha'} + O_{2\gamma} - O_{1\beta}]\, 1_\alpha + O_{1\beta} = (M_6 - O_{2\gamma}) \cdot 1_{\alpha+\alpha'} + \\ + (O_{2\gamma+\alpha} - O_{1\beta+\alpha} + O_{1\beta})$$

que expresa un giro de amplitud $\alpha + \alpha'$ y cuyo centro tiene por afijo

$$(O_{2\gamma+\alpha'} - O_{1\beta+\alpha} + O_{1\beta})$$

según se desprende de la observación d [19-d].

Si $\alpha' + \alpha = O$, o bien $\alpha' + \alpha = 2k\pi$, entonces

$$P_{\alpha_3} = M_6 - O_{2\gamma} + O_{2\gamma+\alpha} + O_{1\beta} - O_{1\beta+\alpha}$$

que es, evidentemente, una traslación (18-5).

20. Simetrías en el plano

1. Simetría respecto a un punto o simetría central. Definición. — *Dado un punto fijo* O *del plano* (fig. 20-1), *llamaremos simetría respecto a* O *a la transformación geométrica que a todo punto* P *de una figura* (F) *hace corresponder un punto* P′ *de* (F′) *alineado con* P *y* O, *tal que se verifica:*

$$\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$$

El punto O se denomina *centro de simetría.*

Esta transformación es un giro de amplitud π y por consiguiente goza de las siguientes propiedades:

1.ª Conserva el sentido del plano.

2.ª Los pares de puntos homólogos se corresponden doblemente, o, lo que es lo mismo, el cuadrado de la transformación es la identidad.

3.ª El punto O es doble, las rectas que pasan por el centro son dobles, pero no de puntos dobles.

4.ª La simetría central transforma puntos alineados en puntos alineados, triángulos en triángulos iguales, conserva los ángulos, una recta la transforma en otra recta paralela, etc.

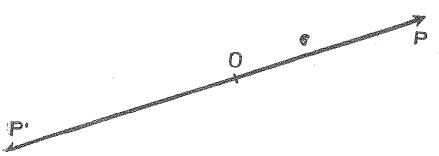


FIG. 20-1

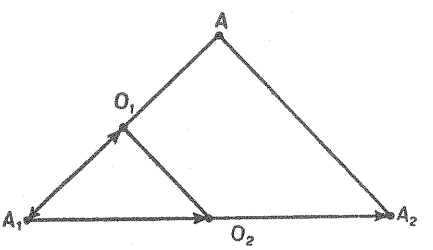


FIG. 20-2

2. Producto de dos simetrías respecto a dos centros distintos. — Teorema. *El producto de dos simetrías de centros* O_1 *y* O_2 *es una traslación definida por el vector* $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Consideremos los puntos O_1 y O_2 (fig. 20-2). Un punto A tiene como homólogo en la simetría respecto a O_1 el punto A_1, y se verifica

$$\overrightarrow{AA_1} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1A_1} \qquad [20\text{-a}]$$

Al punto A_1 le corresponde en la simetría de centro O_2 el A_2, tal que

$$\overrightarrow{A_1A_2} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1O_2} \qquad [20\text{-b}]$$

sumando vectorialmente [20-a] y [20-b], resulta

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1A_1} + 2 \cdot \overrightarrow{A_1O_2} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2} \text{ constante}$$

luego es una traslación.

Recíprocamente, *una traslación se puede considerar de infinitas formas, como producto de dos simetrías centrales.*

En efecto, sea la traslación definida por $\vec{V} = \overrightarrow{AA_2}$ (fig. 20-2), escogido un punto arbitrario O_1, siempre existe otro O_2, tal que

$$2\,\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{V}$$

Trazado el triángulo determinado por AO_1 y A_2O_2, se obtiene el punto A_1, de modo que el teorema de la paralela media nos da que

$$\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{O_1A_1} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{A_2O_2} = \overrightarrow{O_2A_1}$$

por consiguiente, A tiene por homólogo a A_1 en una simetría central de centro O_1, y A_1 a A_2 en otra de centro O_2.

3. Simetría ortogonal respecto a un eje, o simetría axial. — *Dado un eje* r (figura 20-3), *llamaremos simetría axial a una transformación tal, que a todo punto* A *de una figura* (F) *hace corresponder un punto* A′ *de la figura* (F′), *de modo que* AA′ *sea perpendicular a* r, *y si* A_1 *es el punto de intersección de* AA′ *con* r, *se verifica:*

$$AA_1 = A_1A'$$

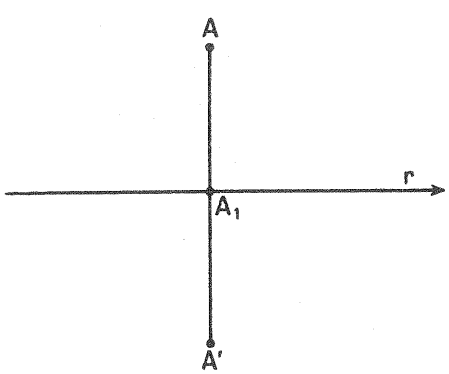


FIG. 20-3

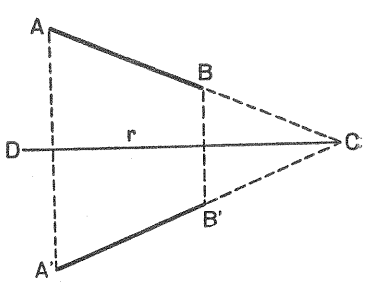


FIG. 20-4

La simetría axial goza de las propiedades siguientes:

1.ª *Invierte el sentido del plano,* como se puede comprobar en un triángulo.

2.ª *Todo punto del eje se transforma en sí mismo,* es decir, el eje es una recta de puntos dobles en la transformación. Las rectas perpendiculares al eje son dobles, pero no de puntos dobles, ya que cada par de puntos homólogos están a distinto lado del eje, aunque en la misma perpendicular.

3.ª *El cuadrado de la transformación es la identidad.* En efecto, considerando un punto A, le corresponde el A', y a éste le corresponde el A en la misma simetría.

4.ª Si una recta s corta al eje, su homóloga s' lo corta precisamente en el mismo punto que la s, por ser doble este punto en la transformación.

4. Otras propiedades de la simetría axial. — 1.ª *La simetría axial conserva las distancias y transforma puntos alineados en puntos también alineados.*

En efecto, sean A y B dos puntos cualesquiera y A' y B' sus respectivos simétricos respecto a r (fig. 20-4).

Existe un giro alrededor de r que manteniendo invariable la distancia $\overline{AB}$, superpone A con A' y B con B' y por consiguiente

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

2.ª *La simetría axial transforma segmentos en segmentos iguales,* pues un segmento, conjunto de puntos alineados, se transforma en otro segmento, otro conjunto de puntos alineados y además de igual longitud.

3.ª *La simetría axial transforma triángulos en triángulos iguales, ángulos en ángulos iguales.*

Pues un triángulo y su transformado tienen los lados iguales, y al ser iguales, sus ángulos también lo son.

Pero obsérvese que los triángulos tienen sus elementos colocados en orden inverso, es decir, que la simetría invierte el sentido del plano. Estos triángulos se denominan inversamente iguales.

5. Producto de dos simetrías ortogonales de ejes paralelos. — Teorema. *El producto de dos simetrías ortogonales de ejes paralelos es una traslación definida por el vector* $\overline{V}$ *de módulo el doble de la distancia que separa los ejes, y de dirección la perpendicular a dichos ejes y del primero al segundo.*

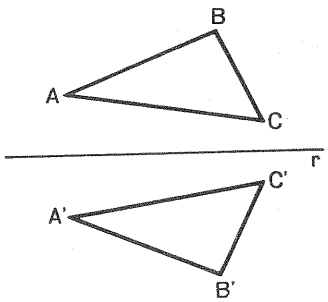


FIG. 20-5

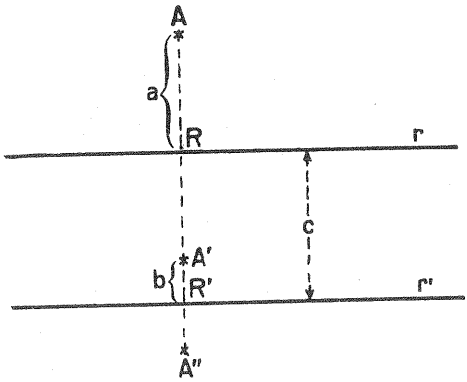


FIG. 20-6

Sean las simetrías definidas por los ejes r y r' (fig. 20-6), en las que a un punto A de una figura (F) corresponde el A' de (F') en Sr y a éste, a su vez, le corresponda el A'' de (F'') en Sr'. Por definición podemos escribir:

$$AR = RA' = a \qquad \text{y} \qquad A'R' = R'A'' = b$$

$$AA'' = a + a + b + b = 2a + 2b = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot c$$

siendo c la distancia entre los dos ejes, que es constante y por consiguiente la última expresión define una traslación de $\vec{V} = 2\vec{c} = 2\overrightarrow{RR'}$.

Es evidente que si invertimos el orden de los factores se invierte el orden de la traslación, por consiguiente el producto de axiales de ejes paralelos no es conmutativo.

Recíproco. — *Una traslación puede descomponerse de infinitas maneras en el producto de dos simetrías de ejes paralelos.*

Sea la traslación que transforma la figura (F) en (F'') (figura 20-6), y consideremos en ella un par de puntos homólogos A y A''; tracemos una recta cualquiera r, perpendicular a AA'' en un punto arbitrario y determinemos el punto A', simétrico del A respecto a r. La mediatriz del segmento $A'A''$ nos determina el eje r' de la segunda simetría.

6. Producto de simetrías ortogonales cuyos ejes se cortan. — **Teorema.** *El producto de dos simetrías ortogonales cuyos ejes se cortan, es un giro de centro* O, *intersección de los dos ejes y amplitud el doble del ángulo que forman dichos ejes, en el sentido del primero al segundo eje.*

Consideremos las simetrías de ejes r y r' (fig. 20-7) que se cortan en el punto O, y consideremos los puntos simétricos A, A' de la primera simetría y el A'', simétrico de A', en la simetría de eje r'. Podemos escribir:

$$OA = OA' = OA''$$

Es decir, los puntos A, A', A'' están sobre una circunferencia de centro O; por otra parte, podemos considerar la igualdad de los ángulos

$$\text{áng. } AOR = \text{áng. } ROA' = \qquad \text{y} \qquad \text{áng. } A'OR' = \text{áng. } R'OA'' =$$

es decir,

$$\text{áng. } AOA'' = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha+\beta) = 2\gamma$$

Si se invierten los factores se invierte el sentido del giro, luego este producto no es conmutativo.

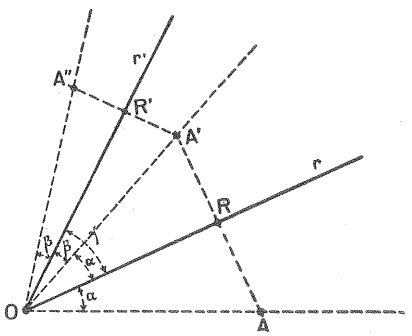


FIG. 20-7

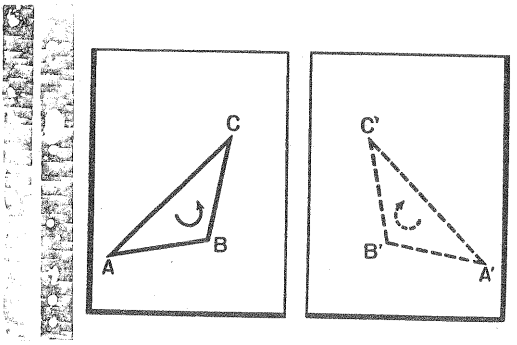


FIG. 20-8

Recíproco: *Un giro se puede aescomponer de infinitas maneras en el producto de dos simetrías ortogonales cuyos ejes se cortan.*

Consideremos el giro que transforma (F) en (F'') (fig. 20-7), y consideremos en ella un par de puntos homólogos A, A''; tracemos una recta r que pase por O y determinemos el punto A' simétrico de A respecto a r. La perpendicular por O a $A'A''$ será el otro eje de simetría r'.

7. **Movimientos.** — *Definición. En Geometría se llama movimiento a una transformación puntual por la que a una figura* (F) *cualquiera se le hace corresponder una figura igual* (F'). Esta transformación se apoya en el axioma de rigidez o indeformabilidad de las figuras. El concepto de movimiento nos es proporcionado por la observación de los cuerpos sólidos que cambian de posición respecto a un sistema de referencia en el transcurso del tiempo. Pero la Geometría prescinde de esta variable física, para fijarse únicamente en las posiciones inicial y final.

Los movimientos son: *directos* si conservan el sentido del plano, como las traslaciones, giros, simetrías centrales; e *inversos* si invierten el sentido del plano, como en la simetría axial. Así en la figura 20-8, los triángulos ABC y $A'B'C'$ se han obtenido uno de otro mediante una simetría axial, o bien considerando uno de ellos y el que se obtiene por transparencia del papel en el que está dibujado.

Una figura y la obtenida a partir de ella por un movimiento, se dice que son congruentes o iguales, y esta congruencia goza de las propiedades siguientes:

Idéntica. Una figura F es congruente consigo misma

$$F = F$$

Recíproca. Si F es congruente con $F' \Longrightarrow F = F'$, será F' congruente con F, es decir,

$$F' = F$$

Transitiva. Si F es congruente con F' y ésta con F'', será F congruente con F'', que se indica,

$$F = F' \quad \text{y} \quad F' = F'' \Longrightarrow F = F''$$

Obsérvese que dos figuras, obtenidas una de otra por medio de un movimiento directo se les puede hacer coincidir deslizando una de ellas en el plano que las contiene. Estas figuras se denominan figuras directamente iguales y el movimiento que transforma una en otra se llama *movimiento directo o euclídeo.*

En cambio, dos figuras relacionadas con un movimiento inverso, no se les puede hacer coincidir si no es sacándolas del plano, como se puede observar en la figura 20-8. Este movimiento se denomina *movimiento de segunda especie o antimovimiento.*

Todas las transformaciones hasta aquí estudiadas, es decir, los movimientos, se denominan transformaciones de igualdad, pues todos ellos transforman una figura en otra igual a ella.

8. Tabla de multiplicar de los movimientos simétricos. Grupo abeliano. — Consideremos dos ejes r y r' perpendiculares y que se cortan en O (fig. 20-9). Llamemos I a la transformación idéntica: S_0, a la simetría central respecto a O; S_r, a la simetría axial respecto a r y $S_{r'}$, a la simetría respecto a r'. Si hacemos el producto de estas transformaciones, la transformación resultante pertenece al conjunto, gozando además este producto de la propiedad asociativa y conmutativa; por tanto, este conjunto constituye un grupo abeliano.

La tabla adjunta nos da inmediatamente el resultado de las operaciones. Basta saber que dicho resultado nos lo da la intersección de la fila y columna de las transformaciones que multiplicamos

	I	S_0	S_r	$S_{r'}$
I	I	S_0	S_r	$S_{r'}$
S_0	S_0	I	$S_{r'}$	S_r
S_r	S_r	$S_{r'}$	I	S_0
$S_{r'}$	$S_{r'}$	S_r	S_0	I

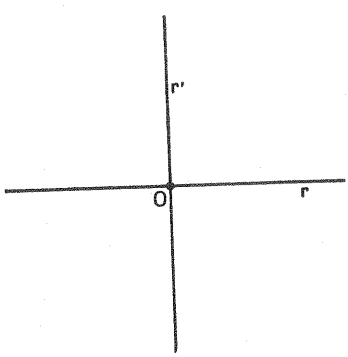


FIG. 20-9

9. Expresión analítica de la simetría. — Sea el punto $A(x, y)$, cuyo simétrico es $A'(x', y')$. Si el eje de simetría es uno de los ejes de coordenadas (fig. 20-3), las fórmulas de transformación evidentemente son:

$$S_x \longrightarrow \begin{matrix} x' = x \\ y' = -y \end{matrix} \quad \text{e igualmente} \quad S_y \longrightarrow \begin{matrix} x' = -x \\ y' = y \end{matrix} \qquad [20\text{-c}]$$

Supongamos que el eje de simetría es la recta r, que pasando por $P(a, b)$, forma con el eje de abscisas un ángulo α. Siempre podremos considerar un giro $G_{2\alpha}$ que transforma la figura F en otra F', de modo que (fig. 20-10),

$$G_{2\alpha} = S_r \cdot S_s \Longrightarrow G_{2\alpha} S_s = S_r S_s S_s = S_r$$

pues $S_s \cdot S_s =$ a la identidad.

Nos queda, pues, que la simetría buscada es

$$S_r = G_{2\alpha} \cdot S_s = G_{2\alpha} \cdot S_x \cdot T_b$$

ya que $S_s = S_x T_b$, pues, $S_x S_s = T_b \Longrightarrow S_x S_x S_s = S_s = S_x T_b$

La traslación T_b viene definida por $\vec{V} = 2\vec{b}$. Pero se vio que al aplicar un giro a A de centro P queda como afijo

$$G_{2\alpha} \longrightarrow a + bi + 1_{2\alpha}\,[(x+iy) - (a+bi)]$$

y al aplicarle la simetría S_x según [20-c] se transforma en

$$G_{2\alpha} \cdot S_x \longrightarrow a - bi + 1_{2\alpha}\,[(x-yi) - (a-bi)]$$

al aplicarle la traslación queda

$$G_{2\alpha} \cdot S_x \cdot T_b \longrightarrow a - bi + 1_{2\alpha}\,[(x-yi) - (a-bi)] + 2bi$$

Por consiguiente, así obtendremos el afijo de A', es decir,

$$x' + y'i = a + bi + 1_{2\alpha} \cdot [(x-a) - (y-b)\,i] =$$
$$= a + bi + (x-a)\cos 2\alpha + (y-b)\,\text{sen}\,2\alpha + i\,[(x-a)\,\text{sen}\,2\alpha - (y-b)\cos 2\alpha]$$

Luego, las fórmulas de transformación serán

$$\begin{matrix} x' = a + (x-a)\cos 2\alpha + (y-b)\,\text{sen}\,2\alpha \\ y' = b + (x-a)\,\text{sen}\,2\alpha - (y-b)\cos 2\alpha \end{matrix} \qquad [20\text{-d}]$$

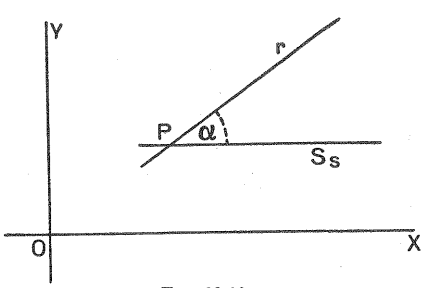


FIG. 20-10

21. Producto de traslaciones, giros y simetrías en el plano

1. Producto de dos giros G_{α_1} y G_{α_2} en el caso de que $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$. — *El producto de estos giros es otro giro cuyo centro está en el infinito, ya que*

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = k\pi$$

que satisface a la condición de 19-5.

Este giro es una traslación, ya que un segmento se transforma en otro igual por tratarse de un giro y además paralelo al dado, porque ha girado un ángulo de $2k\pi$.

Podremos hallar el vector $\vec{V}$ que define la traslación, hallando el transformado de un punto cualquiera, pero es mucho más sencillo tomar el transformado de uno de los centros de giro. Así (fig. 21-1), hallamos el transformado de O_1, que en el giro G_{α_1} de ese centro permanece invariante y al aplicarle el otro giro G_{α_2} se transforma en O', siendo por consiguiente $\overrightarrow{O_1O'}$ el vector de la traslación.

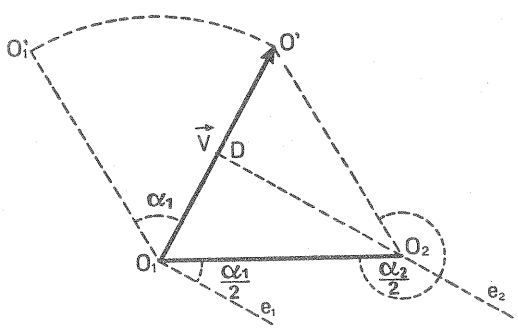


FIG. 21-1

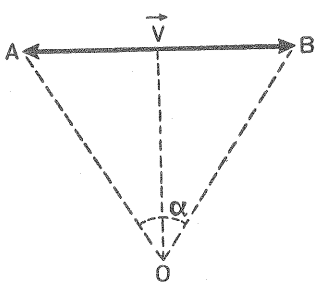


FIG. 21-2

Esta transformación equivale al producto de dos simetrías axiales, cuyos ejes son e_1 y e_2, puesto que

$$\overrightarrow{O_1O'} = 2\,\overrightarrow{O_1D} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{O_1O'} \perp e_1$$

Si invertimos el orden de los giros, el G_{α_2} transforma O_1 en O' y el G_{α_1} transforma O' en O'_1, por lo que la traslación vendría dada por $\overrightarrow{O_1O'_1}$, conforme a lo que vimos antes de que el producto de dos giros no es conmutativo.

2. Producto de un giro por una traslación $G_\alpha T_v$ y de una traslación por un giro $T_v G_\alpha$. — Sea el giro de centro O y amplitud α (figura 21-2) y la traslación definida por $\vec{V}$.

Los productos $G_\alpha T_v$ *y* $T_v G_\alpha$, *son giros de amplitud* α, pues en el primer caso G_α transforma AB en $A'B'$, de modo que

$$AB = A'B' \qquad \text{y} \qquad \text{áng. } (AB,\ A'B') = \alpha \text{ constante}$$

Y, luego T_v transforma $A'B'$ en $A''B''$, de modo que

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''}$$

Por consiguiente

$$AB = A''B'' \qquad \text{y} \qquad \text{áng. } (AB,\ A''B'') = \alpha \text{ constante}$$

En el segundo producto $T_v G_\alpha$ se tiene sucesivamente

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{y} \quad A'B' = A''B'' \\ \text{áng. } (A'B',\ A''B'') = \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = A''B'' \quad \text{y} \quad \text{áng. } (AB, A''B'') = \alpha$$

Ahora bien, si A es el centro del giro resultante en el primer caso, ha de ser de manera que G_α transforme A en B y T_v ha de transformar B en A, así queda A invariante, condición para que sea centro.

Obtendremos A pues, construyendo sobre $\vec{V}$ como base, un triángulo isósceles con vértice en O y ángulo en el vértice α.

En el segundo producto se llega a la misma conclusión pero tiene distinto centro, es decir, este producto *no es conmutativo.*

3. El producto de simetrías axiales en el plano es asociativo. — Sean e_1, e_2 y e_3 los ejes de tres simetrías cualesquiera. Un punto cualquiera A de la figura F se transforma en A' de F' mediante las tres simetrías como se indica, de modo que se puede escribir:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A'}$$

como resultado de aplicar a F el producto $S_{e_1} S_{e_2} S_{e_3}$

Pero

$$\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) + \overrightarrow{A_2A'} = \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{A_2A'} \longrightarrow (S_{e_1} S_{e_2}) S_{e_3}$$

Y además:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA_1} + (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A'}) = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A'} \longrightarrow S_{e_1} (S_{e_2} S_{e_3})$$

Lo dicho para el punto A es válido para cualquier punto de F, por consiguiente,

$$(S_{e_1} S_{e_2}) S_{e_3} = S_{e_1} (S_{e_2} S_{e_3})$$

como se quería demostrar.

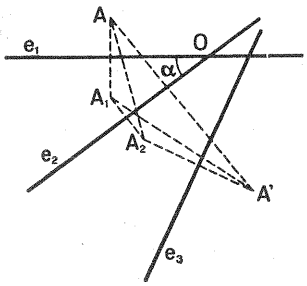


FIG. 21-3

El producto $S_{e_1}S_{e_2} = G_{2\alpha}$ que es un movimiento directo, pero al multiplicarlo por S_{e_3} invierte el plano

$$S_{e_1}S_{e_2}S_{e_3} = G_{2\alpha}S_{e_3}$$

y esta última forma nos da el medio para la construcción rápida de la transformación.

4. El producto de cualquier número de traslaciones y giros en un orden cualquiera, es igual a un giro único o una traslación. — En efecto, sea n el número de factores del producto.

Si $n = 2$, por 20-5 y 21-1 y 2, sabemos que dicho producto es un giro o una traslación, cuyo producto por un giro o traslación, da otro giro o traslación. Siguiendo así llegaríamos al final y como resultado obtendríamos un giro o una traslación.

Según se dijo, las traslaciones y giros constituyen movimientos directos, por lo que podremos afirmar:

El conjunto de todos los movimientos directos forma grupo.

En efecto, es suficiente con probar que:

a) *Dicho producto es operación interna,* pues el producto de movimientos directos es otro movimiento directo.

b) Dicho producto es asociativo, es decir, que

$$(M_1M_2)\,M_3 = M_1\,(M_2M_3)$$

M_1 transforma F en F'
M_2 transforma F' en F''
M_3 transforma F'' en F'''
$\Longrightarrow$ (M_1M_2) transforma F en F'' y $\Longrightarrow$

$(M_1M_2)\,M_3$ transforma F en F'''

Además,

M_1 transforma F en F'
M_2 transforma F' en F''
M_3 transforma F'' en F'''
$\Longrightarrow$ (M_2M_3) transforma F' en F''' $\Longrightarrow$

$M_1\,(M_2M_3)$ transforma F en F'''

c) Existe el movimiento unidad, que tiene nulo el giro G_0 y nula la traslación T_0.

d) Todo movimiento tiene su simétrico $G_\alpha \longrightarrow G_{-\alpha}$ y $T_v \longrightarrow T_{-v}$.

Por no ser conmutativo $GT \neq TG$, este conjunto no es abeliano.

5. Todo movimiento es igual a un movimiento directo o al producto de un movimento directo por una simetría axial. — Según sabemos, el conjunto de los movimientos directos (giros y traslaciones) y de los movimientos inversos (simetrías axiales), se denomina genéricamente movimiento.

Sea el producto de varios movimientos

$$M_1M_2M_3 \dots M_n$$

en que M_i es una traslación, un giro o una simetría axial.

Si M_t es una traslación o un giro, se descompone en el producto de dos simetrías axiales de modo que

$$M_t = St_1St_2$$

por lo que haciendo la sustitución al hacer a t sucesivamente $t = 1, 2, 3, \dots n$, se tiene un producto de simetrías axiales

$$M_1M_2M_3 \dots M_n = S_1S_2S_3 \dots S_m \qquad [21\text{-a}]$$

en la que las S son simetrías axiales.

Si m es par [21-a] es un movimiento directo, pues cada dos simetrías constituyen una traslación, o un giro.

Si m es impar [21-a] da una simetría axial o un movimiento inverso, por la misma razón.

Por lo que queda demostrado.

Esto nos autoriza a decir que: *El conjunto de todos los movimientos es un grupo, del que es un subgrupo, el conjunto de los movimientos directos.* No es conmutativo.

Su demostración es idéntica al número anterior.

6. Existe un movimiento único que transforma un triángulo en otro igual. — En efecto, sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos que son iguales. Habrá de suceder que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (fig. 21-4) o que $AB = A'B'$, pero no paralelas.

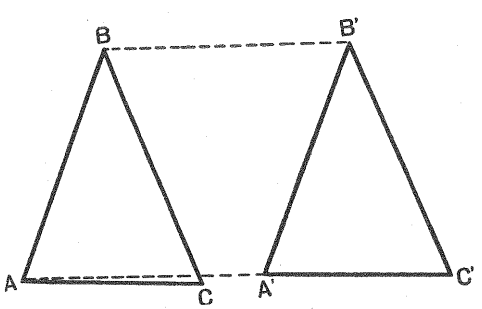


FIG. 21-4

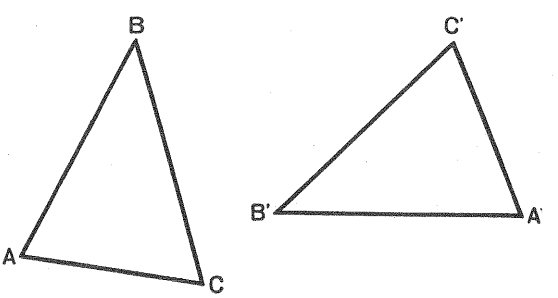


FIG. 21-5

En el primer caso existe una traslación de $\vec{V} = \overrightarrow{B'B}$ que transforma $B'A'$ en BA, y como los triángulos son iguales, $A'B'C'$ se transformará en ABC o en su simétrico respecto a AB, y en ambos casos hemos encontrado un movimiento, que será una simple traslación o el producto de una traslación por una simetría, que transforme $A'B'C'$ en ABC.

En el caso de que AB no sea paralelo a $A'B'$, existe un giro que transforma $A'B'$ en AB, pues $AB = A'B'$ y por consiguiente estamos en el mismo caso que antes, es decir, que existe un movimiento consistente en un giro o un giro por una simetría axial, que transforma $A'B'C'$ en ABC, como se quería demostrar.

Nos resta probar que ese movimiento es único, puesto que si existiesen dos movimientos M_1 y M_2 que transformasen $A'B'C'$ en ABC, entonces M_1 transformaría A, B y C en A', B' y C' y M_2 en A', B' y C_1, pero entonces tendremos las siguientes identidades

$$\left.\begin{array}{l} ABC \equiv A'B'C' \\ ABC \equiv A'B'C \end{array}\right\} \Longrightarrow A'B'C' \equiv A'B'C_1 \Longrightarrow C' \equiv C_1$$

22. Razón simple

1. **Producto de segmentos.** — Sean los segmentos m y n, que colocamos en dos semirrectas r y r' a partir del punto O de intersección (fig. 22-1), de modo que $OU = 1$, $OM = m$, $ON = n$.

Si unimos U con N y por M trazamos una paralela MP a NU, OP se llama producto de OM y ON, que indicamos

$$P = m \cdot n$$

Este producto así definido goza de las propiedades siguientes:

a) *Uniforme,* es decir, que no depende de las semirrectas que nos sirven para obtenerlo. En efecto, efectuemos el producto de los mismos segmentos m y n en otras dos semirrectas s y s' (fig. 22-1 b), y llevemos la s' sobre r', de modo que coincidan O y M de s' con O y M de r' y que s tome la posición de s_1, fuera del plano POM.

$$\text{Por ser } \left.\begin{matrix} NU \parallel PM \\ UN' \parallel MP' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow NN' \parallel PP' \Longrightarrow OP = OP' = mn$$

con lo que queda demostrado.

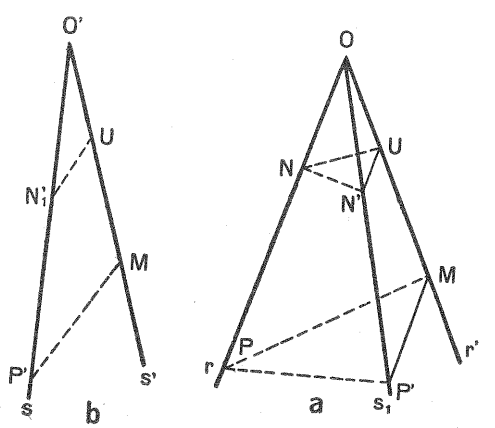


FIG. 22-1

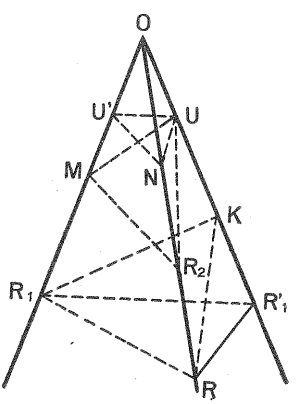


FIG. 22-2

b) *Asociativa.* En efecto, tomemos en el triedro de la (fig. 22-2):

$$\left.\begin{matrix} OU = OU' = 1 \\ OK = k \\ OM = m \\ MU \parallel KR_1 \end{matrix}\right\} \quad \text{y en} \quad OR_1K \Longrightarrow OR_1 = R_1 = km$$

$$\left.\begin{array}{l} OR_1' = OR_1 = R_1 \\ ON = n \\ UN \parallel R_1'R \end{array}\right\} \quad \text{en } ORR_1' \Longrightarrow OR = R = R_1 n = (km)\,n \qquad \text{[22-a]}$$

Pero

$$U'UN \parallel R_1R_1'R \Longrightarrow U'N \parallel R_1R \parallel MR_2 \Longrightarrow \text{en } OMR_2 \Longrightarrow OR_2 = mn = R_2$$

y además

$$UMR_2 \parallel KR_1R \Longrightarrow UR_2 \parallel KR \Longrightarrow \text{en } OKR \Longrightarrow OR = R = KR_2 = k\,(mn) \qquad \text{[22-b]}$$

Por consiguiente, de [22-a] y [22-b] sale

$$R = (km)\,n = k\,(mn)$$

c) *Conmutativo.* En efecto (fig. 22-3), tracemos en el ángulo

$$OU = OU' = 1 \qquad ON = n \quad \text{y} \quad OM = m$$

Unamos U con N y por M dibujemos $MP \parallel UN$, resulta

$$OP = P = m \cdot n$$

Unamos U' con M y trácese $N'P' \parallel U'M$, resulta

$$OP' = P' = nm$$

Pero mediante el teorema de Desargues se puede demostrar

$$OUU' \sim OPP'$$

Por consiguiente,

$$OU = OU' \Longrightarrow OP = OP' \Longrightarrow$$
$$P = P' = mn = nm$$

d) Es fácil probar que: *el producto de un segmento* m *por otro igual a la unidad es el mismo segmento* m.

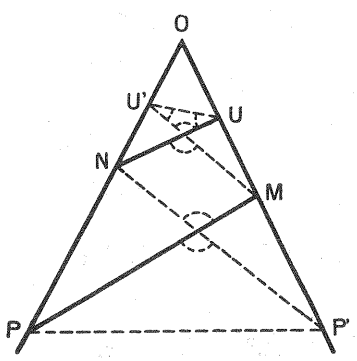


FIG. 22-3

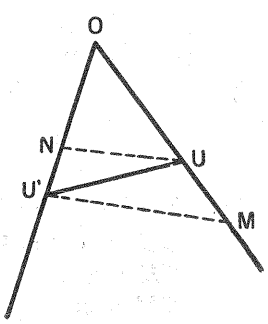


FIG. 22-4

e) *Y que dado un segmento, siempre existe otro cuyo producto por aquél da la unidad.*

En efecto (fig. 23-4), sea $OU = OU' = 1$, $OM = m$ y $ON = n$. Aplicando la definición dada se tiene

$$OM \cdot ON = OU' \Longrightarrow m \cdot n = 1$$

f) *Distributiva respecto de la suma.* En efecto, tomemos (fig. 22-5)

$$\left.\begin{array}{l} OU = 1, \quad ON = n \\ OQ = q = OM + OP = m + p \\ MM' \parallel NU \parallel P'P \parallel Q'Q \end{array}\right\} \text{ Será } OQ' = q' = OM' + OP' = m' + p'$$

Pues los segmentos determinados en r y r' por el haz de paralelas, se corresponden en la igualdad y en la suma. Por consiguiente,

$$\left.\begin{array}{l} m' = mn \\ p' = pn \end{array}\right\} \text{ pero } \left.\begin{array}{l} q' = m' + p' \\ q = m + p \end{array}\right\} \Longrightarrow q' = qn = m' + p' \Longrightarrow (m+p)n = mn + pn$$

2. Cociente de segmentos. — *Llamamos cociente de dos segmentos,* a *(dividendo) y* b *(divisor), a otro segmento,* c, *tal que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo,* es decir, c es el cociente si

$$a = b \cdot c \quad \text{que se indicará} \quad c = a : b \quad \text{o bien} \quad c = \frac{a}{b}$$

La representación gráfica del cociente de dos segmentos, se deduce muy fácilmente de la multiplicación. Teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación se puede poner

$$a = bc \Longrightarrow an = bcn = (bn)c$$

y por consiguiente

$$c = \frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$$

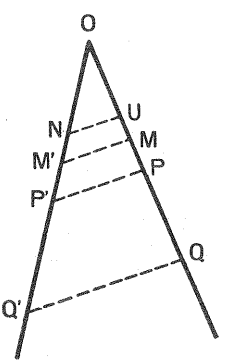


FIG. 22-5

Por lo que el cociente indicado de dos segmentos admite simplificación, como en las fracciones.

3. Teorema de Thales. — *Si dos rectas cualesquiera* r *y* r' *que tienen un punto común* O, *son cortadas por dos paralelas, los segmentos determinados en* r *y* r' *por el punto* O *y las paralelas, son proporcionales.*

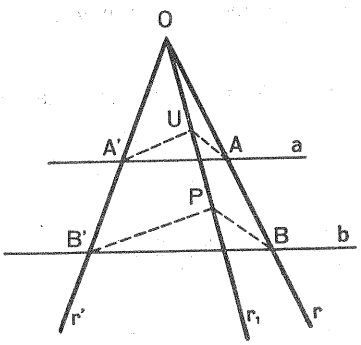


FIG. 22-6

En efecto (fig. 22-6), sean las rectas r y r' que se cortan en O y tracemos las paralelas a y b que las cortan en A y A', B y B'. Dibújese la recta r_1, de modo que forme un triedro con r y r' y tómese $OU = 1$ y trazando UA y su paralela BP, se tiene

$$UA \parallel BP \Longrightarrow A'AU \parallel B'BP \Longrightarrow A'U \parallel B'P$$

Lo que nos permite escribir

$$\left.\begin{array}{l} OB = OP \cdot OA \\ OB' = OP \cdot OA' \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'},$$

que nos demuestra el teorema.

4. Definición de razón simple. — *Dados tres puntos* A, B, C *sobre un eje* r (figura 22-7), *llamaremos razón simple al valor de la razón de los segmentos orientados:*

$$\frac{AB}{AC}$$

El signo depende del sentido de los segmentos considerados.

La representaremos así

$$(ABC) = \frac{AB}{AC}$$

FIG. 22-7

5. Variación de la razón simple. — Consideremos la razón simple (XBC) en la que B y C son fijos y X recorre la recta r (fig. 22-8).

El valor de la razón simple dependerá, naturalmente, de las posiciones de X sobre r.

Llamamos a esos valores λ, es decir:

$$\lambda = \frac{XB}{XC}$$

a cada punto X corresponderá un valor de λ, y recíprocamente, a cada valor de λ corresponde un punto X.

Si elegimos un origen O de coordenadas, a cada uno de estos puntos corresponderá abscisa $X \longrightarrow x$, $B \longrightarrow b$ y $C \longrightarrow c$, y expresando λ en función de dichos números, podemos escribir:

$$\lambda = \frac{b - x}{c - x}$$

Es decir, λ es función de x, y los valores que toma para distintas posiciones de X son:

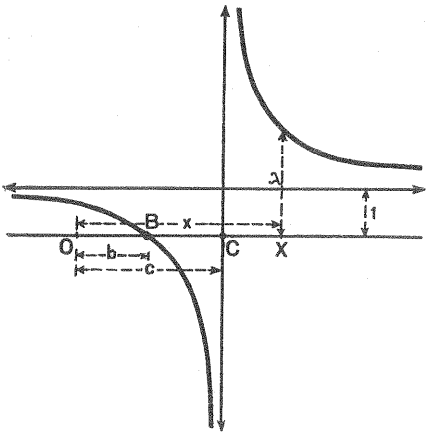


FIG. 22-8

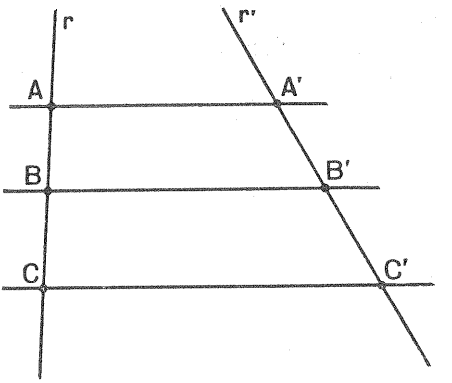


FIG. 22-9

1.° Es negativa en el segmento BC, positiva fuera de él. Es decir:

$$b<x<c \Longrightarrow \lambda<0 \quad \text{y} \quad \left.\begin{matrix} -\infty<x<b \\ c<x<\infty \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lambda>0$$

2.° Se anula cuando $X \equiv B$, por lo que a este punto se llama *punto origen.*

3.° Cuando X tiende a C por la izquierda, λ tiende a $-\infty$ y tiende a un valor infinito cuando X tiende al mismo punto, pero por la derecha. A este punto se llama *punto límite.*

4.° Cuando X se aleja indefinidamente en ambos sentidos, λ tiende al valor 1.

En la figura 22-8 se ha representado gráficamente esta función.

Es de advertir que al alterar el orden de los puntos de la razón simple, varía el valor de la misma. A continuación damos los diversos valores que puede tomar la razón simple, que dejamos como ejercicio de comprobación para el alumno.

$$(ABC)=\frac{AB}{AC}; \qquad (ACB)=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{(ABC)}; \qquad (CBA)=1-(ABC)$$

$$(CAB)=\frac{1}{(ABC)-1}; \qquad (BAC)=\frac{(ABC)}{(ABC)-1}; \qquad BCA=\frac{(ABC)-1}{(ABC)}$$

6. La razón simple como invariante en la proyección paralela y en la proyección central sobre rectas paralelas. — Dadas dos rectas cualesquiera r y r' de un plano y tres paralelas a, b y c del mismo plano, si A, B, C y A', B', C' son las intersecciones respectivas de r y r' con cada una de estas tres rectas paralelas (fig. 22-9), por el teorema de Thales, podemos escribir

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$$

o lo que es lo mismo

$$(ABC)=(A'B'C').$$

Si las rectas r y r' son paralelas y las a, b y c concurrentes en O (fig. 22-10), los triángulos OAB y $OA'B'$, son semejantes, lo mismo que los OAC y $OA'C'$, y podemos escribir:

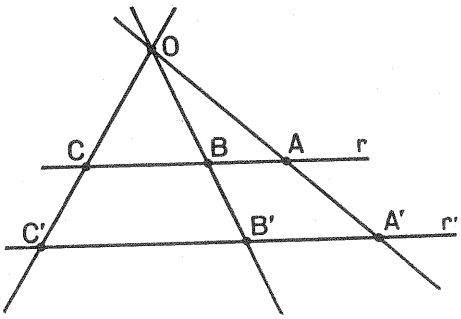


Fig. 22-10

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'}$$

y por ser las segundas razones iguales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

o lo que es lo mismo:

$$(ABC) = (A'B'C') \qquad \text{c. q. d.}$$

23. Homotecia en el plano

1. Definición. — *Dado un punto fijo* O (fig. 23-1), *y un número real* k, *distinto de cero, llamaremos homotecia de centro* O *y razón* k *a la transformación puntual que a un punto* A *de una cierta figura* (F) *hace corresponder un punto* A′ *de* (F′), *de modo que se verifica la relación:*

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$$

El punto A' homólogo de A en la transformación, se llama homotético de A.

FIG. 23-1

De la definición resultan las propiedades siguientes:

1.° Los puntos O, A y A' están alineados. Si $k > O$, la homotecia es *directa*, y los puntos A y A' están en la misma semirrecta de origen O. Si $k < O$, la homotecia es *inversa*, y los puntos A y A' están separados por O.

2.° Si $k = 1$, la homotecia se convierte en la *identidad*.

3.° Si $k = -1$, la homotecia se convierte en una *simetría de centro* O.

4.° Toda recta que pasa por el centro O es *doble*.

5.° Para cada terna (OAA'), (OBB'), formada por el centro y un par de puntos homólogos, se verifica:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$$

Es decir, la razón simple es invariante en la homotecia.

2. Teorema fundamental. — *La condición necesaria y suficiente para que una transformación puntual sea una homotecia, es que exista un número* k, *diferente de la unidad, tal que dados dos pares de puntos* AA′ *y* BB′, *se verifique:*

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

Consideremos la (fig. 23-2), dos puntos A y B, y sus homólogos en la homotecia de centro O razón k.

Por definición de homotecia podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OB'} &= k \cdot \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OA'} &= k \cdot \overrightarrow{OA}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A'B'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

En resumen:

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} \qquad [23\text{-a}]$$

Recíprocamente, *si* AB *y* A'B' *son dos segmentos no iguales y paralelos, existen dos homotecias que transforman uno en el otro.* En efecto, por no ser iguales AB y $A'B'$, las rectas AA' y BB' se cortan en un punto O, de forma que ABO y $A'B'O$ son dos triángulos semejantes que permiten poner

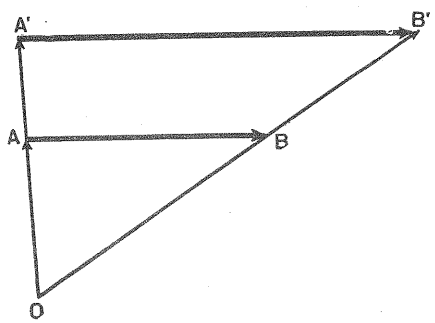


FIG. 23-2

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB}}{OB'} = k$$

que indica que O es el centro de homotecia.

Pero también se han de cortar las rectas AB' y $A'B$ en otro punto diferente O', que lo mismo que antes nos permite poner:

$$\frac{\overrightarrow{O'A}}{O'B'} = \frac{\overrightarrow{O'B}}{O'A'} = k'$$

por lo que O' es otro centro de homotecia, que es inversa.

Corolario: *Los ángulos homotéticos son iguales, pues tienen los lados paralelos, de igual o distinto sentido, según que la homotecia sea directa o inversa.*

3. Las homotecias transforman puntos alineados en puntos alineados, y puntos no alineados en puntos no alineados. — En efecto, sean A, B y C tres puntos y sus homotéticos A', B' y C'. Por el teorema fundamental se puede poner:

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{B'C'} = k \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$

Si A, B y C están en este orden alineados se puede poner:

$$AC = AB + BC$$

Pero multiplicando ambos miembros por k y reemplazando

$$k \cdot AC = k \cdot AB + k \cdot BC \Longrightarrow A'C' = A'B' + B'C'$$

lo que nos prueba que A', B' y C' están también alineados.

Si por el contrario A, B y C no están alineados será

$$AC < AB + BC$$

Y por consiguiente, haciendo como antes, será

$$A'C' < A'B' + B'C'$$

que nos prueba que A', B' y C' no están alineados.

4. Producto de dos homotecias con el mismo centro. — Sean dos homotecias del mismo centro O y razón de homotecia k y k', respectivamente. A un punto A de la figura (F), la primera homotecia hace corresponder un punto A' de (F'), verificándose:

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \qquad [24\text{-b}]$$

Al punto A', la segunda homotecia hace corresponder el A'' de (F''), tal que se verifica:

$$\overrightarrow{OA''} = k' \cdot \overrightarrow{OA'} \qquad [24\text{-c}]$$

multiplicando miembro a miembro [24-b] y [24-c], obtenemos:

$$\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA''} = kk' \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} \qquad \overrightarrow{OA''} = kk' \cdot \overrightarrow{OA}$$

Lo que nos dice que A'' es el transformado de A en la homotecia de razón $k \cdot k'$ y centro O.

Las homotecias del mismo centro forman grupo abeliano, pues:

a) La simetría central es una homotecia de razón -1 y la identidad es la homotecia de razón 1.

b) Es fácil probar que el producto de homotecias concéntricas es asociativo y conmutativo.

c) Dada una homotecia de potencia k, existe otra de potencia $\frac{1}{k}$, cuyo producto con la primera es la unidad.

5. Producto de dos homotecias de distinto centro. — Una homotecia de centro O y razón k, transforma AB en $A'B'$ (fig. 23-3), y a su vez otra homotecia de razón k' y centro O' transforma $A'B'$ en $A''B''$. Por el teorema fundamental, podemos escribir:

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{A''B''} = k' \cdot \overrightarrow{A'B'} = kk' \cdot \overrightarrow{AB}$$

Si $k \cdot k' \neq 1$, esta relación nos dice que la transformación producto es una homotecia de razón $k'' = k \cdot k'$.

Si $k \cdot k' = 1$, se tiene una traslación o la identidad.

Por tanto, podemos afirmar que el producto de dos homotecias de centros O *y* O′ *y razón* k *y* k′, respectivamente, es una homotecia de razón k · k′.

El centro O'' de la homotecia producto está alineado con O y O', en efecto.

La recta OO' es $\left.\begin{array}{l}\text{doble en } F \text{ y } F', \text{ pues pasa por } O \\ \text{doble en } F' \text{ y } F'', \text{ pues pasa por } O'\end{array}\right\} \Longrightarrow$ pasa por O''.

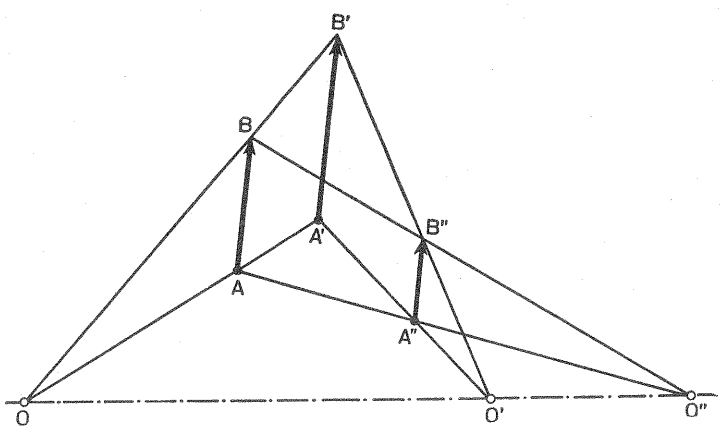


FIG. 23-3

Este producto de homotecias no concéntricas posee las propiedades siguientes:

a) Posee *unidad,* que es la homotecia cuya potencia es $k = 1$ que produce la identidad.

b) A cada homotecia de potencia k *le corresponde otra homotecia de potencia* $\frac{1}{k}$ *cuyo producto por aquélla es la identidad.*

c) Este producto es *asociativo.* En efecto, sean las homotecias

$$(H_1H_2)\,H_3 = H_1\,(H_2H_3)$$

Se justifica por el siguiente esquema:

$$\left.\begin{array}{l}H_1 \text{ transforma } A \longrightarrow A_1 \\ H_2 \text{ transforma } A_1 \longrightarrow A_2 \\ H_3 \text{ transforma } A_2 \longrightarrow A_3\end{array}\right\} \; H_1H_2 \text{ transforma } A \longrightarrow A_2 \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}(H_1H_2)\,H_3 \\ \text{transforma } A \longrightarrow A_3\end{array}$$

$$\text{Pero} \left.\begin{array}{l}H_1 \text{ transforma } A \longrightarrow A_1 \\ H_2H_3 \text{ transforma } A_1 \longrightarrow A_3\end{array}\right\} \Longrightarrow H_1\,(H_2H_3) \text{ transforma } A \longrightarrow A_3$$

d) No es *conmutativo,* es decir, $H_1H_2 \neq H_2H_1$
pues por

$$H_1,\ O_1 \longrightarrow O_1 \quad \text{y por} \quad H_2,\ O_1 \longrightarrow O'_1$$

Pero por

$$H_2,\ O_1 \longrightarrow O'_1 \quad \text{y por} \quad H_1,\ O'_1 \longrightarrow O'_2 \neq O'_1$$

Luego *las homotecias no concéntricas en el plano forman grupo,* considerando como tal la homotecia de centro en el infinito, que es una traslación.

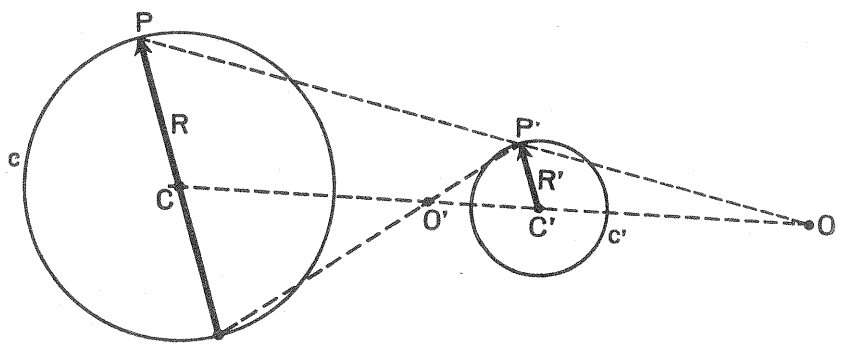


FIG. 23-4

6. Circunferencias homotéticas. — *Dos circunferencias de un mismo plano son siempre homotéticas respecto a dos centros, uno llamado de homotecia directa y otro de homotecia inversa.* En efecto (fig. 23-4), tracemos dos radios paralelos cualesquiera CP y $C'P'$ y uniendo sus extremos nos determinarán el punto O, un centro de homotecia, pues se satisface para $\dfrac{R}{R'} = k$

$$\overrightarrow{CP} = k \cdot \overrightarrow{C'P'} \quad \text{y también} \quad \overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OP'}$$

Pero es evidente que considerando el punto O', también se tiene

$$\frac{R}{R'} = -k' \qquad \overrightarrow{CP_1} = -k'\overrightarrow{C'P'} \quad \text{o bien} \quad \overrightarrow{OP_1} = -k'\overrightarrow{O'P'}$$

Dadas dos circunferencias es fácil construir sus dos centros de homotecia. Lo dejamos a la iniciativa del lector.

7. Homotecia de tres circunferencias. — Consideremos dos circunferencias c y c' de centros C y C', situados en un mismo plano. Sean I_3, I'_3 los centros de homotecia de estas circunferencias. Consideremos una tercera circunferencia c'' (figura 23-5). Las circunferencias c' y c'' tienen por centros de homotecia I_1, I'_1 y las c y c'' los puntos I_2, I'_2. Podemos agrupar estas homotecias tres a tres, considerando tres centros de homotecia de índices distintos, de modo que una de las

homotecias sea el producto de las otras dos. Sabemos que en estas homotecias existen dos o ninguna negativas, y que sus centros están alineados.

Resumiendo:

1.° Los centros de homotecia positiva están alineados, y la recta que los contiene se llama *eje de homotecia directa.*

2.° Dos centros de homotecia negativa y el centro asociado de potencia positivas, están alineados según las ternas $I_1I'_2I'_3$, $I_2I'_1I'_3$, $I_3I'_1I'_2$ y constituyen los *ejes de homotecia inversa.*

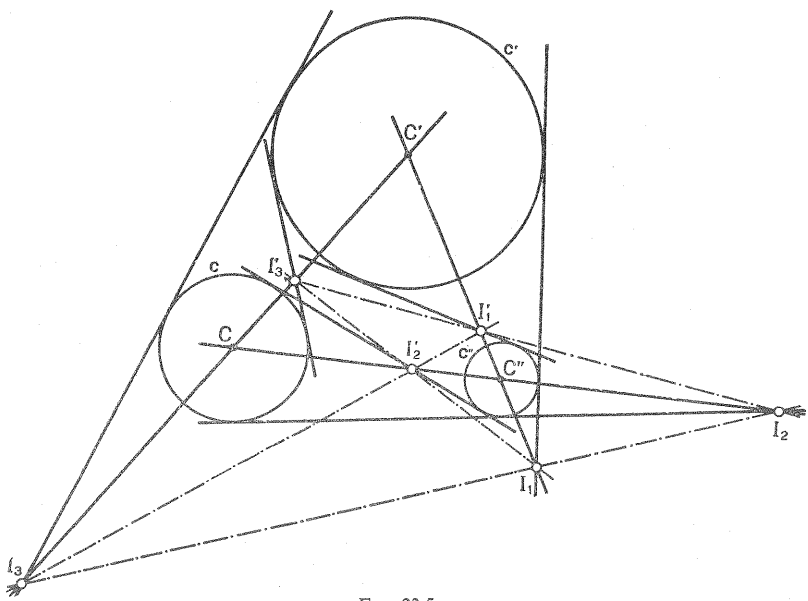


FIG. 23-5

8. Aplicaciones de la homotecia. — 1.ª *Pantógrafo.* Consideremos un paralelogramo articulado $APM'A'$ (fig. 23-6), constituido por cuatro varillas de longitudes invariables. Sean O y M dos puntos tomados sobre los lados AA' y AP, respectivamente, de modo que los puntos O, M, M', para una cierta posición del paralelogramo estén alineados.

En esta posición, los puntos M y M' son homólogos en la homotecia de centro O y razón $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA'}} = k$.

Si se mantiene O fijo, y se deforma la figura, los puntos A y A' permanecen alineados con O, y las rectas AM y $A'M'$ son paralelas, pues el cuadrilátero $APM'A'$ sigue siendo paralelogramo. Los dos vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{A'M'}$ tienen, pues, la misma dirección, y su razón $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{A'M'}}$ es constante, e igual a k.

Por consiguiente, M y M' son homólogos en la homotecia de centro O y razón k.

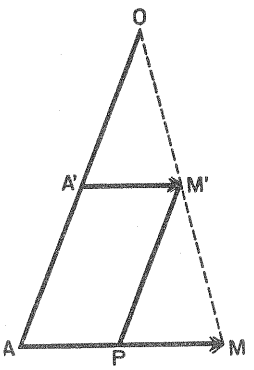


FIG. 23-6

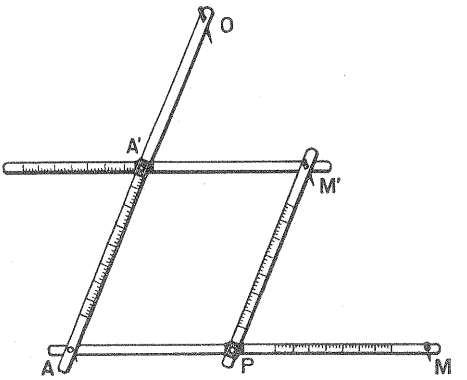


FIG. 23-7

La aplicación de esta propiedad constituye el fundamento del pantógrafo (figura 23-7). Si se disponen los lados del paralelogramo de modo que se verifiquen las condiciones antes dichas, y aplicamos en M un lápiz, al recorrer con M' una cierta figura el punto M, nos reproduce su homotética. Si invertimos los papeles de M y M', obtenemos la figura homotética de la dada, pero de razón de homotecia el inverso de la anterior.

2.ª *Construir una circunferencia tangente a dos rectas concurrentes y que pase por un punto dado* M *de su plano.* Consideremos una circunferencia cualquiera c, tangente a las dos rectas dadas (fig. 23-8). Esta circunferencia es homotética con la buscada. Uniendo M con el centro de homotecia O, tendremos sobre c los puntos M' y M'', homólogos de M. Uniendo éstos con el centro C de c, y trazando por M paralelas a CM', CM'', obtendremos sobre OC dos puntos C' y C'', que serán los centros de dos circunferencias solución.

9. Expresión analítica de la homotecia. — Si el centro de homotecia O coincide con el origen de coordenadas, y la razón de homotecia es k, entonces, a la figura transformada mediante esta homotecia, le corresponde una expresión analítica que se deduce de la primera por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= kx' \\ y &= ky' \end{aligned} \qquad [23\text{-d}]$$

Si el centro O' de homotecia tiene de coordenadas a, b, entonces, para hallar la expresión correspondiente bastará aplicar a [23-d] una traslación de vector $\vec{V} = ai + bj$, y las ecuaciones correspondientes serán:

$$\begin{aligned} x &= kx' + a' \\ y &= ky' + b' \end{aligned}$$

siendo $a' = a(1-k)$ y $b' = b(1-k)$.

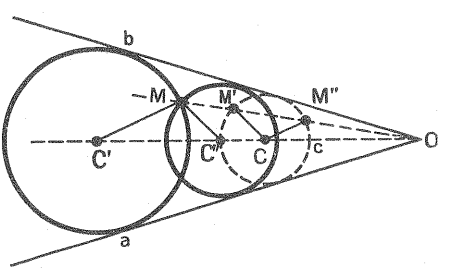


FIG. 23-8

24. Semejanza en el plano

1. Definición. — *Llamaremos semejanza a una transformación puntual obtenida como resultado de aplicar a una figura* (F) *el producto de una homotecia por un movimiento.* Si el movimiento es *directo,* la semejanza será *directa,* e *inversa* en caso contrario. La razón de dos segmentos homólogos es constante.

$$\frac{A'B'}{AB} = k$$

El número k se llama *razón de semejanza.*

De lo dicho se deduce que una semejanza directa se obtiene por el producto de una homotecia por una traslación, un giro o una simetría central (fig. 24-1). La inversa se obtiene por aplicación sucesiva de una homotecia y una simetría axial (figura 24-2).

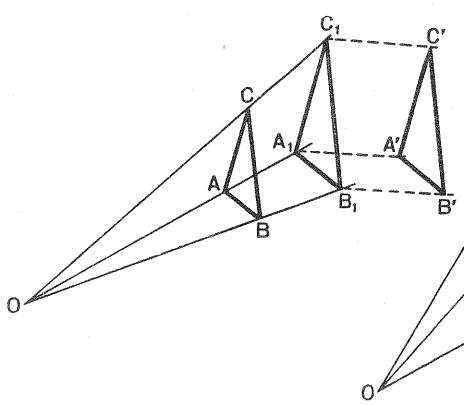


FIG. 24-1

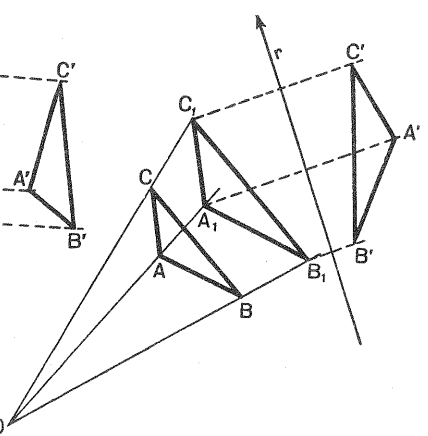


FIG. 24-2

Así definida la semejanza, es fácil ver que tiene las siguientes propiedades:

a) La semejanza transforma puntos alineados en puntos alineados.

b) Segmentos en segmentos cuya razón es constante.

c) Transforma ángulos en ángulos iguales.

d) La homotecia es una semejanza y también lo es un movimiento cualquiera, cuya razón de semejanza es $k = 1$.

2. Estudio de la semejanza directa. — Podemos definir de otra manera la semejanza directa, diciendo que *es una transformación puntual, por la que a todo punto* P *de una figura* (F), *hacemos corresponder un punto* P′ *de* (F′) (fig. 24-3), *tal que para cada par de puntos homólogos se verifica:*

$$A'P' = k \cdot AP \qquad \text{y} \qquad \text{áng. } (\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{A'P'}) = \alpha$$

La homotecia de razón k hace corresponder a (F), (F''), verificándose por definición de homotecia:

$$\frac{\overrightarrow{A''P''}}{\overrightarrow{AP}} = k$$

Ahora bien, al aplicar a (F'') un movimiento directo (giro o traslación), se conservan las distancias, por ser estas transformaciones euclídeas. Luego

$$\frac{A'P'}{AP} = k$$

Por otra parte, al ser (F'') homóloga de (F') en un giro o una traslación, sabemos que el ángulo $(\overrightarrow{A'P'},\ \overrightarrow{A''P''}) = \alpha$; pero como $\overrightarrow{A''P''} = k \cdot \overrightarrow{AP}$, también ángulo $(\overrightarrow{A'P'},\ \overrightarrow{AP}) = \alpha$.

Las relaciones

$$A'P' = k \cdot AP \qquad \text{y} \qquad (\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{A'P'}) = \alpha$$

permiten construir sin ambigüedad, el homólogo P' de un punto dado P, es decir, la semejanza queda perfectamente determinada si nos dan la razón de semejanza y el ángulo que forman dos segmentos homólogos.

Si $k = 1$ y $\alpha \neq 0$, se obtiene una rotación.
Si $k = 1$ y $\alpha = 0$, obtenemos una traslación o una coincidencia.
Si $k \neq 1$ y $\alpha = 0$, se obtiene una homotecia directa.
Si $k \neq 1$ y $\alpha = \pi$, se obtiene una homotecia inversa.

Todas estas transformaciones constituirán para nosotros una semejanza directa.

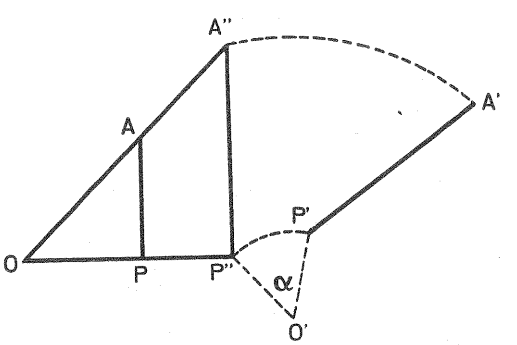


FIG. 24-3

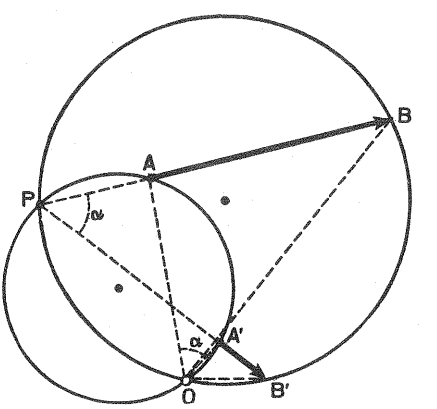


FIG. 24-4

3. Punto doble de una semejanza directa. — *Toda semejanza directa admite un punto doble.* En efecto, sean AB y $A'B'$ dos segmentos homólogos en una semejanza. Tracemos una circunferencia que pase por P, A y A' y otra que pase por P, B y B'. Puesto que se cortan en P, necesariamente han de cortarse en otro punto, si no son tangentes (fig. 24-4).

Si se cortan en O, este punto es un punto doble y se llama centro de semejanza.

$$\left.\begin{array}{l}\text{ áng. } PB'O = \text{ áng. } PBO \\ \text{Pues áng. } PAO = \text{ áng. } PA'O \\ \text{ áng. } BAO = \text{ áng. } OA'B'\end{array}\right\} \Longrightarrow OAB \text{ es semejante a } A'OB'$$

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = k, \text{ que nos indica que } O \text{ es punto doble.}$$

Si existiera otro punto doble O', el segmento OO' sería doble y, por consiguiente, la razón $k = \dfrac{OO'}{OO'} = 1$; no habría semejanza, sino igualdad.

Por consiguiente, *el centro de semejanza directo es único.* Este punto O es a *la vez centro del giro y de la homotecia cuyo producto es la semejanza.*

Si el punto P está en el infinito, entonces $AB \parallel A'B'$ y por consiguiente la semejanza es el producto de la homotecia por una traslación y las circunferencias se transforman en rectas AA' y BB', y su intersección sería el centro de semejanza.

El razonamiento anterior da la pauta para hallar el centro de semejanza de dos figuras.

4. Producto de semejanzas directas. — *El producto de semejanzas es otra semejanza y además es asociativo.*

En efecto, sean las semejanzas Σ_1 y Σ_2, que transforman sucesivamente el segmento AB en $A'B'$ y $A''B''$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'} = k_1 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}) = \alpha_1 \\ \dfrac{A'B'}{A''B''} = k_2 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A''B''}) = \alpha_2\end{array}\right\}$$

$$\frac{AB}{A''B''} = k_1k_2 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A''B''}) = \alpha_1 + \alpha_2$$

que representa una semejanza cuya razón es k_1k_2 y el ángulo que forman una pareja cualquiera de segmentos homólogos es constante e igual a $\alpha_1 + \alpha_2$.

Veamos que este producto es asociativo, es decir, que

$$(\Sigma_1\Sigma_2)\ \Sigma_3 = \Sigma_1\ (\Sigma_2\Sigma_3) \qquad [24\text{-a}]$$

Un segmento $\overline{AB}$ se transforma sucesivamente de la siguiente manera, por cada una de las semejanzas

$$\frac{AB}{A'B'} = k_1 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}) = \alpha_1$$

$$\frac{A'B'}{A''B''} = k_2 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A''B''}) = \alpha_2$$

$$\frac{A''B''}{A'''B'''} = k_3 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{A''B''},\ \overrightarrow{A'''B'''}) = \alpha_3$$

El primer producto de [24-a] representa

$$\frac{AB}{A'''B'''} = (k_1k_2)\,k_3 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'''B'''}) = (\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_3$$

El segundo

$$\frac{AB}{A'''B'''} = k_1(k_2k_3) \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'''B'''}) = \alpha_1 + (\alpha_2+\alpha_3)$$

Conduce a idénticos resultados, luego es cierta la relación [24-a].

Obsérvese que si en lugar de alguno de los giros, interviniese una traslación, ésta se puede considerar como un giro de centro en el infinito y el producto de giros es asociativo. El razonamiento sería válido aun en el caso de que la homotecia fuese inversa, pues los ángulos se verían aumentados en π.

5. Las semejanzas forman grupo. — En efecto, ya que:

a) El producto es una operación interna,

b) que es asociativa

c) existe una semejanza unidad, que es la identidad, que multiplicada por otra semejanza no introduce modificaciones.

d) Dada una semejanza Σ existe otra Σ^{-1} cuyo producto con la primera es la identidad. Efectivamente, la primera transforma un segmento cualquiera AB en otro $A'B'$, de modo que

$$\frac{AB}{A'B'} = k \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \text{ constante.}$$

La segunda, cuya razón de semejanza es $\frac{1}{k}$ y ángulo de giro es $-\alpha$, transforma $A'B'$ en $A''B''$, pues

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A''B''}) = -\alpha \text{ constante.}$$

El producto será

$$\frac{AB}{A''B''} = 1 \quad \text{y} \quad \text{áng. } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A''B''}) = 0$$

Por consiguiente,

$$AB \equiv A''B''$$

El razonamiento es válido cuando en lugar del giro existe una traslación, la cual se le puede suponer un giro de centro en el infinito. Luego las semejanzas forman grupo, no abeliano ya que el giro no es conmutativo.

6. Expresión analítica de la semejanza. — Hemos definido la semejanza como producto de una homotecia por un giro. Sea una homotecia de centro (a, b) y razón k, y un giro de centro (p, q) y ángulo de giro α.

La expresión de la homotecia hemos visto que venía dada por:

$$\begin{aligned} x' - a &= k(x-a) \\ y' - b &= k(y-b) \end{aligned}$$

y la del giro

$$\begin{aligned} x'' - p &= (x'-p)\cos\alpha - (y'-q)\operatorname{sen}\alpha \\ y'' - q &= (x'-p)\operatorname{sen}\alpha + (y'-q)\cos\alpha \end{aligned}$$

la semejanza directa vendrá dada por

$$\begin{aligned} x'' &= k(x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha) + c \\ y'' &= k(x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha) + d \end{aligned}$$

y la inversa

$$\begin{aligned} x'' &= k(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha) + c \\ y'' &= k(x\operatorname{sen}\alpha - y\cos\alpha) + d \end{aligned}$$

Centro de semejanza. — Es el punto que se obtiene al hacer $\begin{matrix} x = x'' \\ y = y'' \end{matrix}$ en las ecuaciones correspondientes.

25. Teoremas de Menelao y Ceva

1. Teorema de Menelao. — *Si los lados de un triángulo* AB, BC *y* CA *son cortados por una recta que no pasa por ningún vértice, en los puntos* M, N *y* P, *respectivamente, se verifica que*

$$(MBA) \cdot (NCB) \cdot (PAC) = 1$$

En efecto (fig. 25-1), sea r la recta y demos un sentido positivo a los lados del triángulo, por ejemplo, $A \to B \to C \to A$.

Por C trácese CL, paralelo a AB, y según el teorema de *Thales* se obtienen las parejas de triángulos semejantes

$$\left.\begin{matrix} MPA \\ CLP \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{MA}{CL} = \frac{PA}{PC}$$

$$\left.\begin{matrix} MBN \\ NCL \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{CL}{MB} = \frac{NC}{NB}$$

$$\Longrightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PC} \cdot \frac{NC}{NB}$$

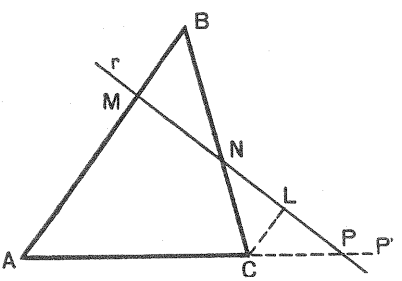


Fig. 25-1

que se transforma en

$$1 = \frac{MB}{MA} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} = (MBA) \cdot (PAC) \cdot (NCB)$$

que considerando los sucesivos segmentos es fácil ver que este producto es positivo.

2. Teorema recíproco de Menelao. — *Si tomamos tres puntos,* M, N *y* P *uno en cada uno de los respectivos lados* AB, BC *y* CA, *de un triángulo y se verifica que*

$$(MBA) \cdot (NCB) \cdot (PAC) = 1$$

los puntos M, N *y* P *están en línea recta.*

En efecto, si la recta MN no corta al lado AC en P, lo cortará en P', y entonces se verificará, por el teorema directo, que

$$(MBA) \cdot (NCB) \cdot (P'AC) = 1$$

de su comparación con la relación de la hipótesis, sale que

$$(P'AC) = (PAC) \Longrightarrow \frac{P'A}{P'C} = \frac{PA}{PC}$$

o bien

$$\frac{P'A - P'C}{P'C} = \frac{PA - PC}{PC} \Longrightarrow \frac{CA}{P'C} = \frac{CA}{PC} \Longrightarrow P'C = PC$$

Es decir, que

$$P' \equiv P$$

3. Teorema de Ceva. — *Si unimos los vértices* A, B *y* C, *de un triángulo, con un punto* O *cualquiera de su plano y* M, N *y* P *son los puntos en que dichas rectas cortan respectivamente a los lados* AB, BC *y* CA, *se verifica que*

$$(MBA) \cdot (NCB) \cdot (PAC) = -1$$

En efecto, el triángulo *BPC* (fig. 25-2) es cortado por la transversal *NA*, por consiguiente, se puede poner:

$$1 = (NCB)\,(APC)\,(OBP) = \frac{NC}{NB}\,\frac{AP}{AC}\,\frac{OB}{OP}$$

y el triángulo *ABP* es cortado por *MC* y por tanto

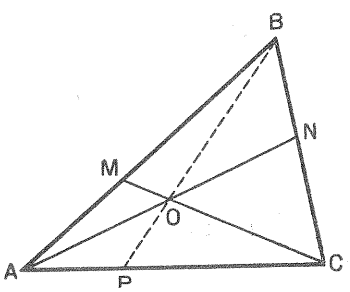


FIG. 25-2

$$1 = (MAB)\,(OBP)\,(CPA) = \frac{MA}{MB}\,\frac{OB}{OP}\,\frac{CP}{CA}$$

Igualando

$$\frac{NC}{NB}\,\frac{AP}{AC}\,\frac{OB}{OP} = \frac{MA}{MB}\,\frac{OB}{OP}\,\frac{CP}{CA}$$

queda

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{AP}{AC} \cdot \frac{CA}{CP} = 1$$

Teniendo en cuenta que $\frac{CA}{AC} = -1$, resulta finalmente que

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PA}{PC} = -1 = (MBA)\,(NCB)\,(PAC)$$

4. Recíproco del teorema de Ceva. — *Si tomamos los puntos* M, N *y* P, *de modo que cada uno pertenezca a un lado de un triángulo, y se cumple que*

$$(MBA)\,(NCB)\,(PAC) = -1$$

las rectas que unen cada uno de los puntos M, N *y* P *con los respectivos vértices opuestos, pasan por un mismo punto.*

En efecto, las rectas *MC* y *AN* se cortan en un punto *O* y supongamos que la recta *BO* corta al lado opuesto en *P'*, por el teorema directo, se tiene

$$(MBA)\,(NCB)\,(P'AC) = -1$$

y por consiguiente,

$$(P'AC) = (PAC) \qquad P' \equiv P$$

26. Inversión en el plano

1. Inversión sobre la recta. — *Dada una recta* r, *un punto fijo* O *de la misma* (figura 26-1), *y un número real* k, *llamaremos inversión de centro* O *y potencia* k, *a la transformación puntual, por la que a un punto* A *hacemos corresponder un punto* A′ *de* r, *de modo que se verifique:*

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = k$$

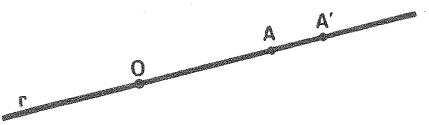


FIG. 26-1

Obsérvese que si aplicamos esta transformación a A' obtenemos el punto A; lo que nos dice que esta transformación es involutoria. A todo punto de r corresponde uno sólo como homólogo a distancia finita, excepto al centro O que corresponde un punto infinitamente alejado sobre r, luego a excepción del punto O, la inversión establece una correspondencia *biunívoca.*

Toda recta que pasa por el centro de inversión es doble, pero no de puntos dobles.

Si $k > 0$, la inversión es *positiva* y existen dos puntos simétricos respecto a O, M y N, que cumplen la condición:

$$OM^2 = ON^2 = k$$

Estos puntos son dobles en la transformación. Pero si k es negativa no existen puntos dobles, ya que cada segmento OA y OA' tienen distintos sentidos. En el primer caso, los pares de puntos homólogos están al mismo lado de O, y en el segundo caso, cada par de puntos homólogos están separados por O.

Como se verifica $\overline{OM}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$, podemos afirmar que la distancia de O a cada par de puntos homólogos, tiene por media geométrica la distancia de O al punto doble.

2. Inversión en el plano. — *Dado un punto* O *en el plano, si a cada punto* P *del mismo, distinto de* O, *le hacemos corresponder un punto* P′, *alineado con* P *y* O, *de modo que se verifique:*

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = k$$

siendo k *un número real cualquiera, queda definida una inversión en el plano.*

Si la potencia $k > 0$, existe una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{k}$, cuyos puntos son homólogos de sí mismos, es decir, son dobles en la transformación, que se llama *circunferencia directriz* o *círculo director.*

Si $k < 0$, no existen puntos dobles. Toda circunferencia que pasa por dos puntos homólogos es doble, aunque no de puntos dobles; puesto que se tiene que la potencia de inversión coincide con la potencia de O respecto a la circunferencia.

Toda circunferencia ortogonal a la circunferencia de puntos dobles en una inversión de potencia positiva es doble, puesto que se verifica (fig. 26-2),

$$R^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$$

Si reemplazamos la circunferencia de inversión C, de puntos dobles, por una recta, entonces toda circunferencia ortogonal tiene su centro en ella, y los puntos homólogos M y M' son simétricos respecto a esta recta r. Aparece así la simetría axial como un caso particular de la inversión, en la que el centro O se ha alejado infinitamente.

La inversión de potencia negativa $-k$ se puede obtener como producto de la inversión de potencia positiva por la simetría central de centro O, en el espacio.

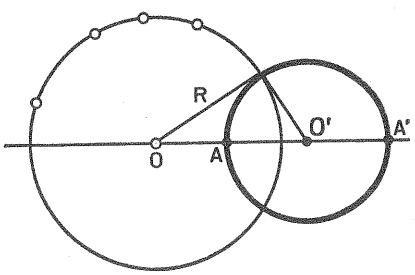


FIG. 26-2

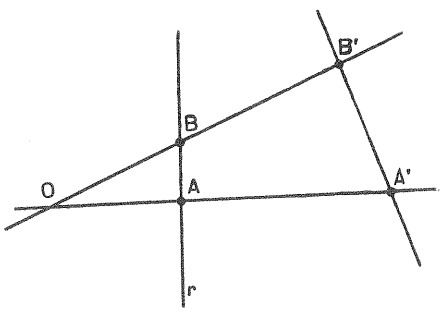


FIG. 26-3

3. Producto de inversiones de igual centro. — *El producto de dos inversiones de igual centro es una homotecia de igual centro.*

En efecto, sea O el centro de las dos inversiones, k y k' sus respectivas potencias, de modo que la primera transforma la figura F en F' y la segunda F' en F''. Llamando A a un punto cualquiera de F y A' y A'' sus sucesivos transformados, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} &= k \\ \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA''} &= k' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{AO}{AO''} = \frac{k}{k'} \Longrightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{k}{k'} \overrightarrow{OA''}$$

que define una homotecia de centro O y razón $\dfrac{k}{k'}$.

Recíprocamente: *El producto de una homotecia por una inversión del mismo centro es otra inversión del mismo centro y cuya potencia es el producto de la razón de la homotecia por la potencia de la inversión.*

En efecto, con la misma notación anterior se puede poner:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA''} = k'\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA''} = kk'$$

que es evidentemente una inversión de centro O y potencia kk'.

De aquí se infiere que *las inversiones concéntricas no forman grupo.*

4. Figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión. — Sea r una recta (fig. 26-3), que no pasa por el centro de inversión O. Tracemos por O la perpendicular a r, y sea A el punto de intersección. Su homólogo A' estará sobre esta perpendicular. Tracemos por O otra recta cualquiera, cortará a r en B, y su homólogo B' será un punto tal que se verificará:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \qquad [26\text{-a}]$$

luego, los puntos $AA'BB'$ son concíclicos, pues [26-a] expresa la potencia de O respecto a una circunferencia que pasa por ellos. Se tiene además, ángulo A = ángulo $B' = 90°$, es decir, el punto B' está sobre la circunferencia de diámetro OA'. Por consiguiente, *la figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por él.*

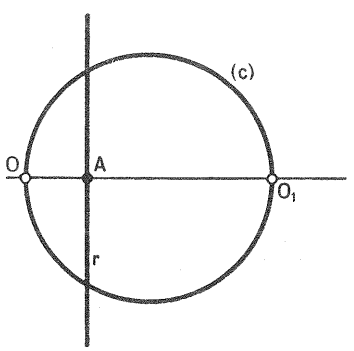


FIG. 26-4

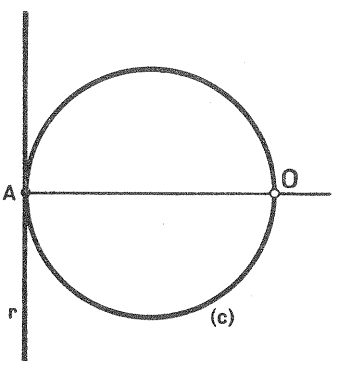


FIG. 26-5

Como la transformación es recíproca, resulta: *la figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él.*

Veamos que son dos las inversiones que transforman una circunferencia C que pasa por el centro de inversión en una recta r no tangente a (c), y una sola si es tangente. En efecto (fig. 26-4), la inversión de centro O y potencia $\overline{OO_1} \cdot \overline{OA}$, transforma r en C, y de la misma manera la de centro O_1 y potencia $\overline{O_1O} \cdot \overline{O_1A}$. Pero si son tangentes (fig. 26-5), entonces no hay más que una inversión de centro O y de potencia $\overline{OA}^2$.

En resumen: *Una recta y una circunferencia pueden ser consideradas como inversas de dos maneras diferentes si no son tangentes y de una sola manera si lo son.*

5. Teorema. — *Dos figuras,* (F′) *y* (F″), *inversas de una misma figura* (F), *respecto a un mismo centro* O *y a dos valores diferentes* k′ *y* k″ *de la constante* k, *son homotéticas. Su centro de homotecia coincide con el centro de inversión* O, *y la razón de homotecia es igual a* k′/k″.

En efecto, si designamos por M un punto cualquiera de la figura primera (F) y por M' y M'' los puntos correspondientes de las figuras F' y F'', puntos que naturalmente están situados sobre la recta indefinida OM, se tiene:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k' \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM''} = k''$$

de donde, dividiendo m. a m., se tiene:

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k'}{k''} \cdot \overrightarrow{OM''}$$

según se quería probar.

6. Teorema. — *La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia.* Sean O y k el centro y la potencia de la inversión dada, y p la potencia del centro O respecto a la circunferencia (c) (fig. 26-6).

La figura inversa de la circunferencia (c) respecto al centro O y potencia de inversión p, es evidentemente la misma circunferencia (c), puesto que se tiene:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = p$$

es decir, que a todo punto M de (c) corresponde un punto N, segunda intersección de la recta OM con (c).

Por consiguiente, según el párrafo anterior, la figura inversa de la circunferencia respecto al centro O y de potencia k es otra circunferencia, puesto que esta figura debe ser homotética con la precedente, es decir, con la circunferencia (c), siendo O el centro de homotecia y k/p la razón de la homotecia.

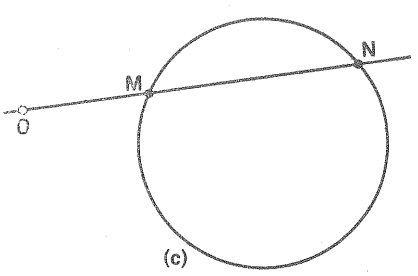


FIG. 26-6

Es decir, que dado un centro O y un número k, potencia de la inversión, la inversa de (c) es otra circunferencia (c') homotética de (c), por serlo de la doble en la inversión.

7. Teorema. — *Dos circunferencias son inversas de dos maneras diferentes si no son tangentes, y de una sola si son tangentes.* Puesto que en la figura 26-8 se tiene:

$$\left.\begin{matrix} O_1B \parallel O_1'A' \\ O_1A \parallel O_1'B' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} OBO_1 \sim OO_1'A' \\ OAO_1 \sim OO_1'B' \end{matrix} \Longrightarrow \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} \Longrightarrow$$

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \text{constante}$$

Por consiguiente, O que es centro de homotecia, es también un centro de inversión directa. De la misma manera se demostraría que el otro centro de homotecia P es a la vez centro de inversión inversa.

Si las circunferencias son iguales, una de las inversiones se reduce a la simetría respecto al eje radical de las dos circunferencias.

Si las dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto es uno de los centros de homotecia. Éste, como puede verse fácilmente, no puede ser centro de inversión, y las dos inversiones se reducen a una sola.

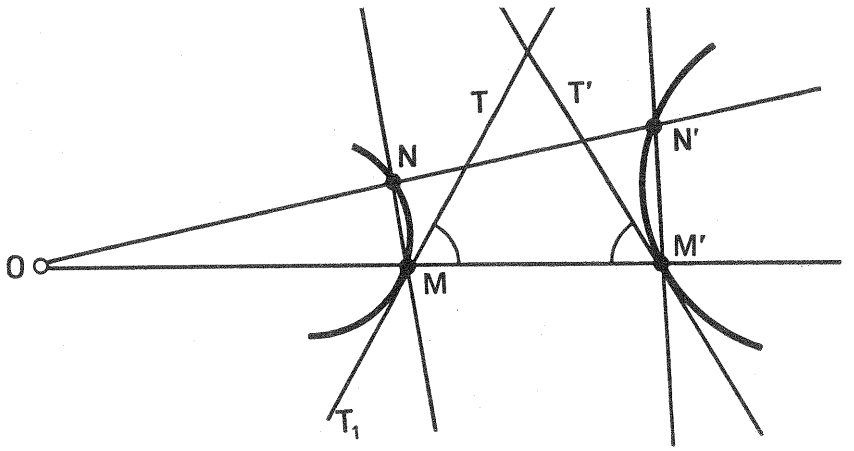


FIG. 26-7

8. La inversión es una transformación conforme. — Dado un segmento $\overline{AB}$ y un arco de curva AC, llamaremos ángulo formado por este segmento AB y el arco AC, al ángulo que forman el segmento AB con la tangente a $\overset{\frown}{AC}$ en el punto común A. Dadas dos líneas l y l' que se cortan en un punto A, llamaremos ángulo formado por estas dos líneas al formado por las tangentes a l y l' en A. Veamos ahora que la inversión es una transformación *conforme*, es decir, que conserva los ángulos.

En efecto, consideremos la figura 26-7, en la que dos curvas MN y $M'N'$ son inversas en una inversión de centro O, y cuyos puntos M y M', homólogos en la inversión, tienen como tangentes MT y $M'T'$. Por definición de inversión se verifica:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON'}$$

Luego, los puntos M, N, M', N' son concíclicos y los ángulos $OM'N'$ y ONM son iguales, por ser éste último suplemento de MNN'. Los ángulos anteriores seguirán siendo iguales en el límite, cuando las secantes NM y $N'M'$ se hayan transformado en las tangentes MT y $M'T'$.

Por consiguiente, como se quería demostrar,

$$TMM' = T'M'M$$

9. Teorema. — *El centro de la circunferencia* (C') *inversa de otra* (C) *respecto al centro de inversión* O (fig. 26-8), *es el inverso del pie sobre* OO_1, *de la perpendicular, bajada desde el punto de tangencia* L *a* C, *de la tangente desde* O.

Sea O'_1 el centro buscado. Las rectas que pasan por O'_1 cortan en ángulo recto a la circunferencia transformada. Las inversas de estas rectas son circunferencias que pasan por O y ortogonales a la circunferencia (C). En particular, la circunferencia inversa del diámetro de C' perpendicular a la tangente común OL, ha de cortar a esta tangente perpendicularmente y como ha de pasar por O, centro de inversión, necesariamente ha de tener por diámetro a OL y cortará a OO_1 en el inverso de O'_1 que llamaremos O'. Es evidente que el ángulo $OO'L = 90°$. Esto nos prueba que O' es el pie de la perpendicular a OO_1 bajada desde L como se quería demostrar.

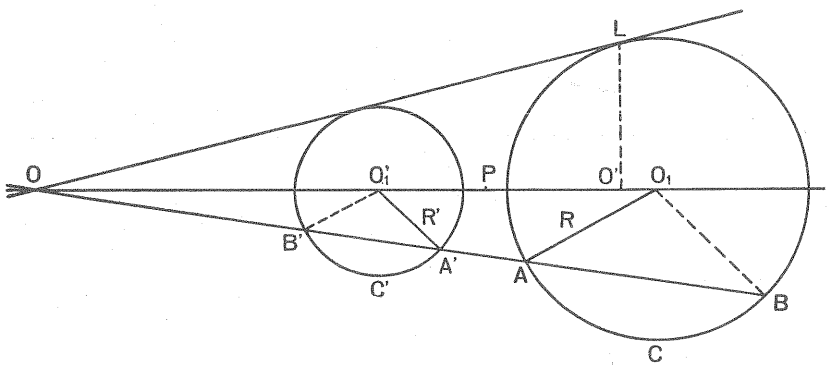


FIG. 26-8

10. Puntos antihomólogos de dos circunferencias. — Sabemos que dos circunferencias homotéticas respecto al punto O son también inversas respecto a este punto.

Para distinguir entre estas dos transformaciones, llamaremos puntos homólogos dos puntos homólogos en la homotecia y puntos antihomólogos a dos puntos inversos.

En dos puntos homólogos las tangentes son paralelas.

Consideremos dos circunferencias (C) y (C') inversas con relación al punto O (figura 26-9). Sean A y B dos puntos de la primera, A' y B' los puntos antihomólogos. Los cuatro puntos, A, B, A', B', están sobre una misma circunferencia. Esta circunferencia se conserva en la inversión y por consiguiente corta a las dos circunferencias dadas bajo el mismo ángulo.

Las cuerdas AB y $A'B'$ se llaman antihomólogas. Se cortan en un punto I, que es el centro radical de estas circunferencias (C), (C') y la $ABA'B'$. Por consiguiente, I está sobre el eje radical de las circunferencias (C) y (C').

Si B tiende hacia A, B' tiende hacia A'. Las dos cuerdas antihomólogas se convierten en dos tangentes, en dos puntos antihomólogos.

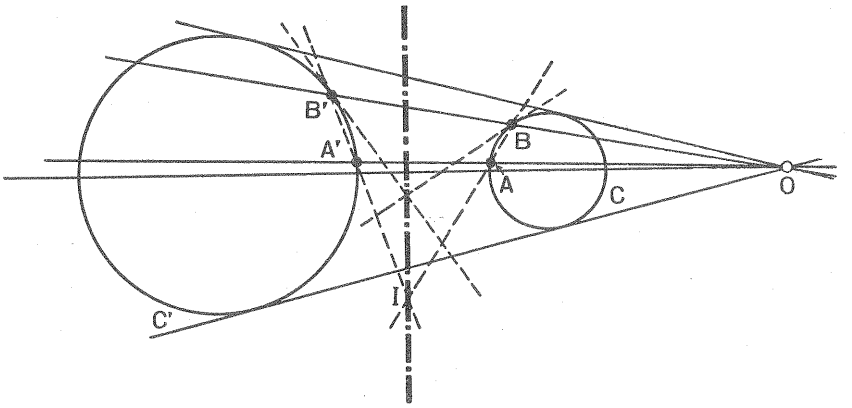


FIG. 26-9

En resumen:

1.° Las cuerdas antihomólogas se cortan en el eje radical.

2.° Lo mismo pasa con las tangentes en los puntos antihomólogos.

11. Expresión analítica de la inversión. — Sea O, origen de coordenadas, el centro de inversión, K la potencia de inversión y $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$ dos puntos homólogos. Podemos escribir:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{K}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}; \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{K}{(x_1^2 + y_1^2)}$$

y de aquí

$$x = x_1 \frac{K}{(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$y = y_1 \frac{K}{(x_1^2 + y_1^2)}$$

que son las ecuaciones de esta transformación.

Si el centro de inversión no es el centro de coordenadas, es fácil ver que las fórmulas de transformación inversa son:

$$x - a = (x_1 - a) \frac{K}{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} \qquad y - b = (y_1 - b) \frac{K}{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}$$

27. Traslación en el espacio

1. Definición. — *Dado un vector* $\vec{V}$, *diremos que una figura* (F') *es la transformada de* (F) *por una traslación definida por el vector* $\vec{V}$, *si para cualquier par de puntos homólogos* A *y* A' *de esa transformación se verifica:*

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$$

La propiedad característica de una traslación en el espacio es la misma que la de una traslación en el plano; es decir, que el vector $\vec{V}$ que une un par de puntos A y B de (F) sea equipolente al $\vec{V}'$ que une los puntos A' y B' homólogos de A y B, respectivamente.

Simbólicamente, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = \vec{V} = \vec{V}' = \overrightarrow{A'B'}$$

Es fácil ver también, teniendo en cuenta lo dicho para la traslación en el plano, que el producto de varias traslaciones es otra traslación.

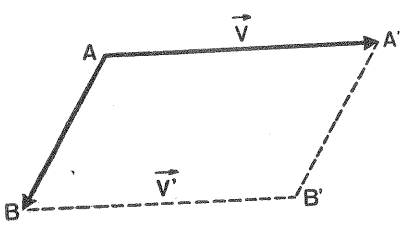


FIG. 27-1

2. Teorema. — *La condición necesaria y suficiente para que una transformación puntual sea una traslación es que dos puntos cualesquiera* A *y* B *tengan por homólogos a otros dos* A' *y* B', *de modo que*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

teniendo el mismo sentido (fig. 27-1).

En efecto, si la transformación es una traslación, se tiene

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \vec{V}\\ \overrightarrow{BB'} &= \vec{V}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow AA'B'B \text{ es un paralelogramo} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

Recíprocamente, *si la transformación es tal que se verifica*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

entonces, como antes, el cuadrilátero $AA'B'B$ es un paralelogramo y por consiguiente,

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{V}$$

3. Transformadas de dos figuras simples. — 1.° *Las traslaciones son transformaciones biunívocas,* pues si los puntos A y B coinciden, sus transformados también coincidirán, pues los vectores que los transforman, al ser equipolentes y tener el origen común, también tendrán común el extremo.

2.° *Las traslaciones transforman puntos alineados en puntos alineados con el mismo sentido,* pues si $AB + BC = AC$, sus homólogos en la traslación satisfacen las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} \left.\begin{array}{l} \\ \text{Además, } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

que nos prueban además que A', B' y C' están alineados y con el mismo sentido.

3.° Los segmentos se transforman en segmentos iguales y paralelos e igualmente orientados, pues un segmento es un conjunto de puntos alineados. Las rectas se transforman en rectas paralelas.

Los ángulos se transforman en ángulos iguales, pues un ángulo y su transformado tendrán los lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

Un triángulo se transforma en otro exactamente igual.

4.° Un plano se transforma en otro coincidente o paralelo, según que el vector que define la traslación sea o no paralelo al dado. Pues considerando dos rectas del mismo plano sabemos que se transforman en otras paralelas y con un punto común, las cuales determinarán un plano paralelo al primero.

5.° Un diedro se transforma en otro igual y un triedro en otro igual e igualmente orientado, pues el triedro dado y el transformado tendrán las caras iguales e igualmente dispuestas, ya que las aristas serán paralelas.

6.° Un tetraedro se transforma en otro directamente igual, pues el dado y el transformado tendrán las caras y diedros iguales e igualmente dispuestos, y por consiguiente son superponibles (fig. 27-2).

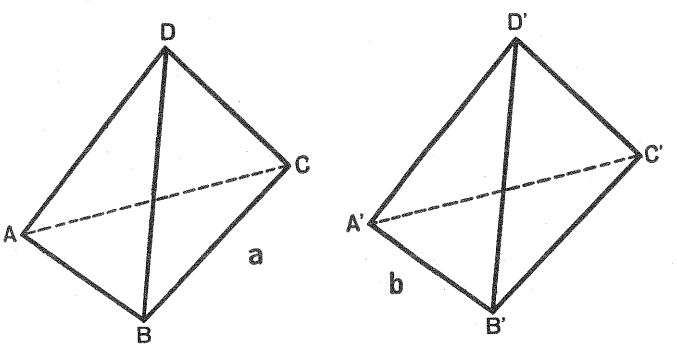


FIG. 27-2

7.° La traslación es un movimiento directo, ya que transforma un tetraedro en otro igual. Esto equivale a que transforma una figura cualquiera en otra igual, pues transforma un triángulo ABC de F, en otro igual $A'B'C'$ de F' y tomando un cuarto punto D de F, formará con ABC un tetraedro, que le corresponderá otro igual

en F' y haciendo que D vaya tomando sucesivamente la posición de todos y cada uno de los puntos de F, veremos que en cada posición le corresponderá uno y sólo un punto de F', de modo que los tetraedros correspondientes serán iguales, es decir, que F y F' son directamente iguales.

4. Producto de traslaciones en el espacio es otra traslación y además ese producto es asociativo y conmutativo. — En efecto, sean A y B dos puntos de una figura y A'_1 y B'_1 sus transformados en la traslación $\vec{V}_1$, A'_2 y B'_2 los transformados en la traslación $\vec{V}_2$ y así sucesivamente, hasta llegar a A'_n y B'_n.

Según el 27-2, se puede poner

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'_1B'_1} = \overrightarrow{A'_2B'_2} = \ldots = \overrightarrow{A'_nB'_n} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'_nB'_n} \qquad [27\text{-a}]$$

condición para que la transformación de AB en $A'_nB'_n$ sea una traslación.

La figura 27-3 nos prueba que el vector que define esta traslación es

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

cosa que es fácil generalizar de la siguiente manera:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots + \vec{V}_n \qquad [27\text{-b}]$$

La [27-a] nos dice que el producto de cualquier número de traslaciones es otra traslación y la [27-b] que ese producto es asociativo y conmutativo, porque ambas propiedades las tiene la suma de vectores.

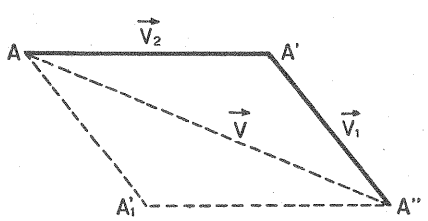


FIG. 27-3

5. Las traslaciones en el espacio forman grupo abeliano. — En efecto, el producto de traslaciones es una operación interna, asociativa y conmutativa.

Existe elemento neutro que es $T_{\vec{O}}$ y elemento simétrico de una traslación $T_{\vec{v}}$ cualquiera, que es $T_{-\vec{v}}$.

Por consiguiente, *forman grupo abeliano.*

Las traslaciones en el plano es un subgrupo de las traslaciones en el espacio.

28. Giros en el espacio

1. Giro en el espacio alrededor de un eje. — *Dado un eje* e *y un ángulo* α, (figura 28-1), *llamaremos rotación o giro de eje* e *a la transformación puntual por la que a todo punto* M *del espacio, hacemos corresponder un punto* M', *de modo que se verifica:*

1.° M' *pertenece al plano* π *perpendicular a* e, *que pasa por* M.

2.° *Si* P *es la intersección de* e *con* π, M' *es el transformado de* M *en la rotación de centro* P *y ángulo de giro* α, *definida sobre el plano* π.

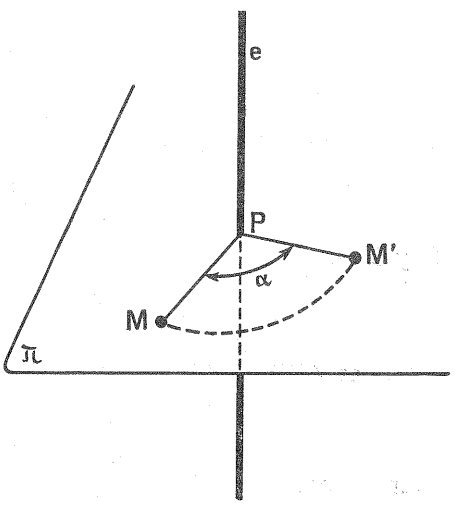


FIG. 28-1

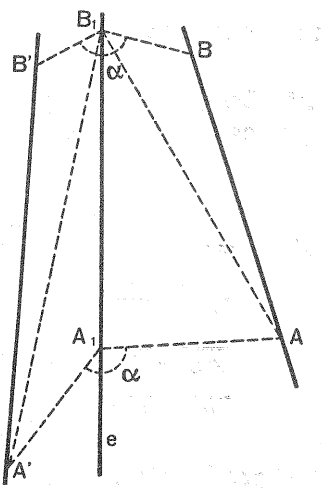


FIG. 28-2

De esta definición se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

El homólogo de *M* es único y determinado.

Todos los puntos del eje *e* son dobles.

La transformación inversa es otro giro del ángulo $-\alpha$.

También es fácil comprobar que el producto de todos los giros de eje *e* forman grupo, y este grupo es *abeliano.*

Un giro de amplitud π alrededor de un eje se llama transposición.

2. Propiedades. — 1.ª *Los giros transforman dos puntos* A *y* B *en otros dos* A' *y* B', *de modo que* $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

En efecto (fig. 28-2), sean A y B dos puntos y A' y B' sus transformados en el giro de eje e y amplitud α; uniendo B_1 con A' y A se puede poner en los triángulos B_1A_1A' y B_1A_1A, siendo los planos $B'B_1B$ y $A'A_1A$ perpendiculares a e

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A_1A'} = \overline{A_1A} \\ \overline{B_1A_1} \text{ común} \\ \hat{B_1A_1A'} = \hat{B_1A_1A} = 90° \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{B_1A_1A'} = \hat{B_1A_1A}$$

y, además,

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{B_1A'} = \overrightarrow{B_1A} \\ \overrightarrow{B_1B'} = \overrightarrow{B_1B} \\ \hat{A'B_1B'} = 90° - \hat{A_1B_1A'} = 90° - \hat{AB_1A_1} = \hat{AB_1B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\Delta}{A'B_1B'} = \overset{\Delta}{AB_1B} \Longrightarrow$$

$$AB = A'B$$

como se quería demostrar.

2.ª *Los giros transforman puntos alineados en puntos alineados.* En efecto, sean los puntos A, B y C, de modo que si están alineados, se tiene:

$$AC = AB + BC \qquad [28\text{-a}]$$

Si sus respectivos homólogos son A', B' y C', se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array}\right\} \text{ la relación [28-a] supone } A'C' = A'B' + B'C'$$

lo cual prueba que también A', B' y C' están alineados.

3.ª Los giros transforman segmentos, conjunto de puntos alineados, en segmentos iguales, triángulos en triángulos iguales, ángulos en ángulos iguales, tetraedros en tetraedros iguales e igualmente dispuestos.

4.ª Una semirrecta en otra semirrecta cuyos orígenes se corresponden, una recta en otra recta. Si la recta es paralela al eje también lo es la transformada. Si la recta corta al eje, como el punto de intersección es doble, su transformada también lo corta en el mismo punto.

5.ª En el giro son figuras dobles, los planos perpendiculares al eje, los círculos cuyo centro está en el eje y su plano le es perpendicular.

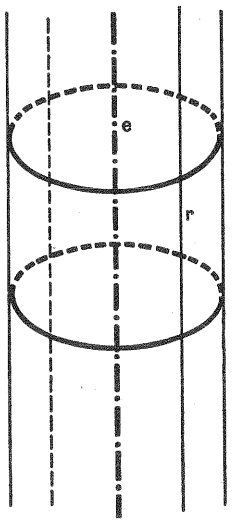


FIG. 28-3

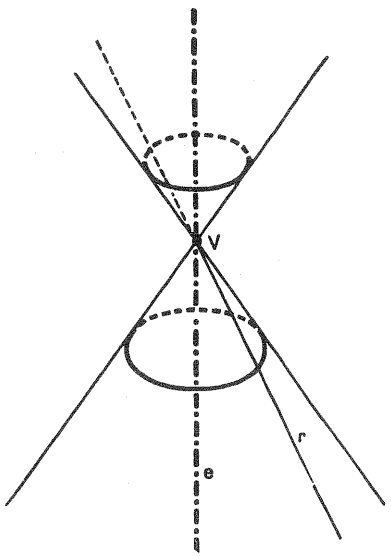


FIG. 28-4

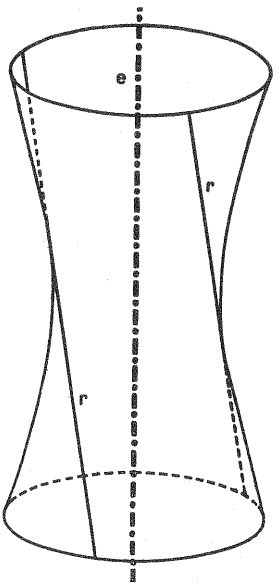


FIG. 28-5

3. Superficies de revolución. — Hemos dicho que los giros alrededor de un eje forman grupo. Si ahora consideramos una línea y todas sus homólogas en los giros del grupo, el conjunto de todas ellas constituye una *superficie de revolución.* La línea considerada se llama *generatriz.*

Las circunferencias descritas por los distintos puntos de la generatriz con centro en la intersección de los planos, que pasan por estos puntos, con el eje se llaman *paralelos.* Se llaman *meridianos* las secciones de esta superficie por planos que pasan por el eje.

Teniendo en cuenta estas consideraciones podemos decir que *una superficie cilíndrica de revolución* está engendrada por el giro de una recta paralela al eje de giro (fig. 28-3). Los paralelos son circunferencias iguales y los meridianos son rectas paralelas al eje.

Si la recta generatriz corta al eje se obtiene la *superficie cónica de revolución* (figura 28-4). Sus paralelos son también circunferencias con centro en el eje de giro, pero cuyos radios van disminuyendo a medida que los planos perpendiculares se acercan al punto de intersección de la generatriz con el eje llamado vértice.

Los meridianos son rectas que pasan por el vértice. Si la recta se cruza con el eje, la superficie engendrada es un hiperboloide de una hoja (fig. 28-5).

Si la generatriz es una circunferencia de diámetro en el eje, la superficie engendrada es una esfera. Si la circunferencia es de centro exterior al eje y coplanaria con él, la superficie engendrada se llama toral o toro (fig. 28-6).

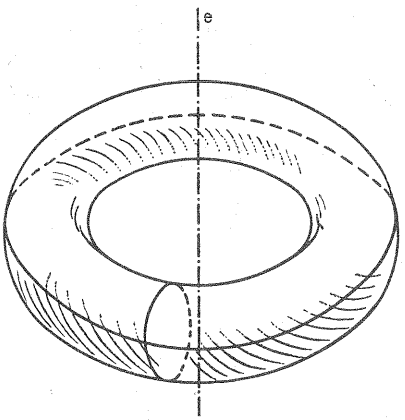


FIG. 28-6

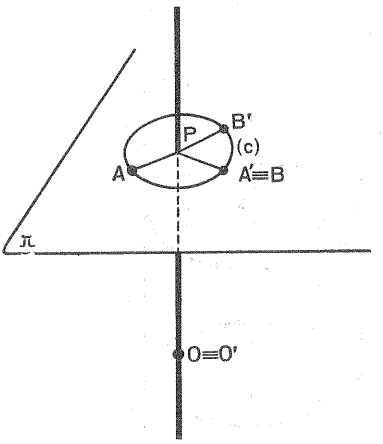


FIG. 28-7

4. **Teorema.** — *Todo movimiento en el espacio, que tiene un punto doble, es un giro alrededor de un eje que pasa por ese punto.* En efecto, sea el movimiento que transforma la figura F en F', siendo A y A' dos puntos homólogos cualesquiera y O un punto doble (fig. 28-7).

a) Si $A \equiv A'$, como $O \equiv O'$, el movimiento es, evidentemente, un giro alrededor de OA y cuya amplitud no se le puede determinar con estos datos.

b) Si no ocurre esto, se tiene

$$\overline{OA} = \overline{OA'}$$

y a un punto $B \equiv A'$, el movimiento hace corresponder otro punto B', de modo que

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OB'}$$

Si A y B' son distintos, los puntos A, A' y B', determinan un plano π, en el que podemos trazar una circunferencia circunscrita al triángulo $AA'B'$ y por consiguiente si P es el centro, OP será perpendicular a π.

Por otra parte, las cuerdas

$$\overline{AA'} \text{ y } \overline{BB'} \qquad \text{o bien} \qquad \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'}$$

son iguales por ser segmentos homólogos en el movimiento, lo cual quiere decir que

$$\text{áng. } APA' = \text{áng. } BPB' = \alpha \text{ constante}$$

condición para que F se transforme en F', mediante el giro de eje OP y amplitud α.

c) Si $A \equiv B'$ (fig. 28-8), trácese $OP \perp AA'$, y entonces

$$OA = OA'$$

por homólogos en el movimiento; pero entonces un giro de eje OP y amplitud π, transforma un punto A cualquiera de F, en su correspondiente A' de F'.

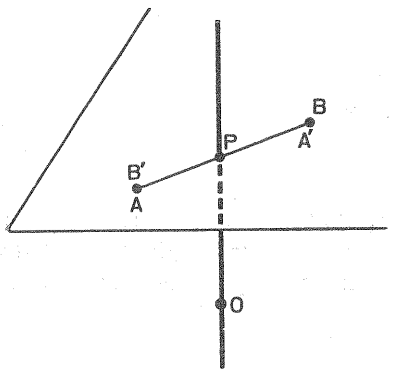


FIG. 28-8

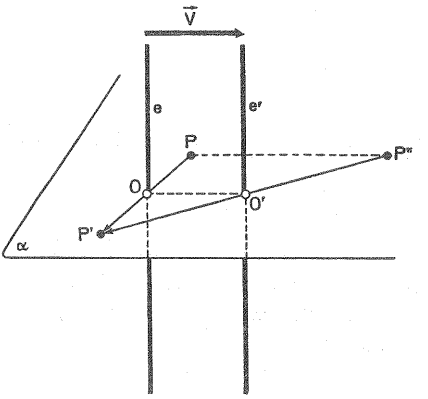


FIG. 28-9

5. Teorema. — *El producto de dos giros de ejes paralelos y ángulos de giro igual a* π, *es una traslación definida por* $2\vec{V}$, *siendo* $\vec{V}$ *el vector que define la traslación* e *en* e'.

Sean e y e' los ejes de los giros considerados y P' el transformado de P por un giro de ángulo π alrededor de e y P'' a su vez, el transformado de P' por un giro π alrededor de e' (fig. 28-9). Los puntos P, P' y P'' determinan un plano perpendicular a e y e', que corta a estos ejes en los puntos O y O', respectivamente.

Los vectores $\overrightarrow{PP'}$ y $\overrightarrow{P'P''}$ nos permiten escribir:

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''}$$

Pero por definición se tiene:

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{OP'} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{P'P''} = 2\overrightarrow{P'O'},$$

por consiguiente

$$\overrightarrow{PP''} = 2(\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'O'}) = 2\overrightarrow{OO'} = 2\vec{V}$$

29. Simetrías central y axial en el espacio

1. Simetría central: definición. — *Dado un punto* O (fig. 29-1), *llamaremos simetría central respecto a* O, *a una transformación por la que a cada punto* A *del espacio hacemos corresponder un punto* A′ *alineado con aquél, de modo que se verifique*

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$$

Aplicando dos veces esta transformación, volvemos a la figura primera, lo que nos dice que una tal transformación es *involutoria.*

Se observa que esta transformación no es un movimiento, pero tiene propiedades parecidas a las del movimiento. Que no es un movimiento se comprueba inmediatamente, ya que transforma un triedro en su opuesto por el vértice, invirtiendo su sentido, y por consiguiente no es superponible con el primero.

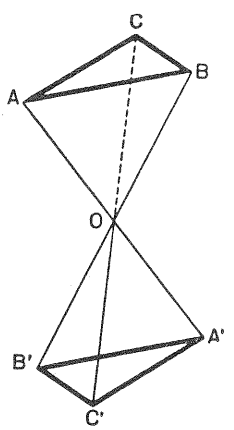


FIG. 29-1

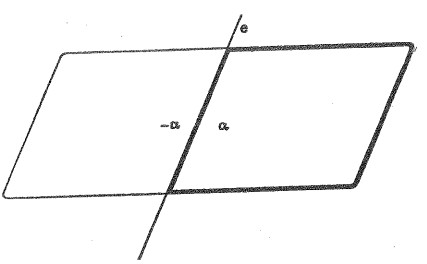


FIG. 29-2

La simetría central es una homotecia de razón $k = -1$, por lo que un segmento se transforma en otro igual y paralelo, puntos alineados en puntos alineados. Un triángulo se transforma en otro inversamente igual, pues siendo sus lados iguales, el orden de colocación lo tiene invertido.

Planos en planos paralelos. Ángulos en ángulos iguales, pero de sentido opuesto y tetraedros en tetraedros iguales, pero con los elementos inversamente orientados, por lo que no son en general superponibles.

El único punto *doble* es el *centro de simetría* y también son dobles, pero no de puntos dobles toda recta y todo plano que pasan por *O,* en los que se subordina una simetría central plana o lineal.

Teorema. — El producto de dos simetrías centrales respecto a O_1 y O_2, es una traslación definida por $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Se demuestra de idéntica manera a como se hizo en el plano, 21-2, pues los puntos A, A', A'', O_1 y O_2, han de ser coplanarios.

2. Simetría axial. — *Dado un eje* e (fig. 29-2), *llamaremos simetría axial al movimiento del espacio que transforma* e *en sí mismo y a un punto* A *de una figura* F *le hace corresponder otro* A', *de* F', *tal que* e *sea mediatriz de* AA'.

Es fácil probar que la simetría axial es una correspondencia *biunívoca,* pues dados un punto A y el eje e, hace corresponder uno sólo A', perteneciente a la perpendicular trazada al eje por A y a igual distancia.

La recta e se llama eje de simetría. Se ve inmediatamente que aplicando dos veces una misma simetría axial a una figura del espacio obtenemos esta misma figura, lo que nos dice que una tal transformación es *involutoria.*

Todos los puntos del eje son dobles, así como todos los planos que pasan por el eje.

3. Propiedades de las simetrías axiales. — *Conserva las distancias* (fig. 29-3).

$CB = C'B'$ por la igualdad de $\overset{\triangle}{OCB} = \overset{\triangle}{OC'B'}$

$DB = D'B'$ porque se transforma uno en otro por un giro de amplitud π

2.° *Transforma puntos alineados en puntos alineados,* pues si A, B y C son tres puntos alineados de la figura F, se tiene

$$AC = AB + BC \qquad [29\text{-a}]$$

Si A', B' y C' son los simétricos en F', se puede poner:

$$\left.\begin{array}{l} AC = A'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \text{teniendo en cuenta [29-a], sale} \quad A'C' = A'B' + B'C'$$

lo que supone que también A', B' y C' están alineados.

3.° *La simetría axial transforma segmentos en segmentos iguales,* pues los segmentos son distancias de puntos alineados. Triángulos en triángulos iguales. Ángulos en ángulos iguales. Triedros en triedros iguales.

4.° *Los planos que pasan por el eje son invariantes,* pues a un punto A contenido en ese plano, le corresponde otro A', contenido en la perpendicular bajada desde A al eje, y como esa perpendicular ha de estar toda ella necesariamente en el plano, también estará el punto A'.

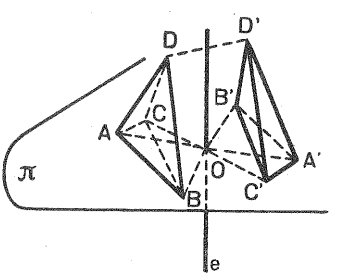


FIG. 29-3

Las rectas que cortan al eje en un punto se transforman en otras que pasan por ese punto, que es doble y además serán coplanarias con el eje.

Un plano que pasa por el eje, subordina una simetría axial plana.

5.° *Los planos normales al eje son invariantes,* pues un punto cualquiera A de ese plano, tiene por transformado a otro A' también perteneciente al mismo plano, por estar en la perpendicular al eje desde A.

4. Teoremas. — a) *El producto de dos simetrías respecto a dos ejes paralelos es una traslación definida por un vector perpendicular a los dos ejes, de módulo igual al doble de la distancia que los separa y cuyo sentido es del primero al segundo.*

Este teorema es el mismo del número 28-5.

b) *El producto de dos simetrías respecto a dos ejes que se cortan en* O, *es un giro alrededor de la recta perpendicular a ambos ejes en* O, *de amplitud doble del ángulo que forman los ejes y cuyo sentido es del primero al segundo.*

En efecto (fig. 29-4), sean e y e' los ejes de simetría, los cuales al cortarse determinan un plano π. Sea A un punto cualquiera de una figura F y B su simétrico respecto a e, siendo A' el simétrico de B respecto a e'.

Trazando AA_1, PB, $A'A'_1$ y OM, perpendiculares al plano π, y tomando $OM = A_1A$, se tiene que

$$AA_1 = PB = A'A'_1 \quad \text{porque} \quad \overset{\triangle}{AA_1L} = \overset{\triangle}{BPL} \quad \text{y} \quad \overset{\triangle}{BPL'} = \overset{\triangle}{A'L'A'_1}$$

Pero

$$MO \text{ es igual y paralelo } \left\{ \begin{matrix} AA_1 \\ A'A'_1 \end{matrix} \right. \Longrightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} AA_1OM \\ MA'A'_1O \end{matrix} \right\} \text{ son paralelogramos} \Longrightarrow AM = A_1O = OP = OA'_1 = MA'$$

Por consiguiente, A, M y A' determinan un plano paralelo a π y por tanto A se transforma en A', mediante las relaciones

$$MA = MA'$$

y $$\text{áng. } AMA' = 2\alpha + 2\beta = 2\widehat{ee'}$$

condición para que la transformación sea un giro alrededor de OM, y cuya dirección, según la figura es de e a e'.

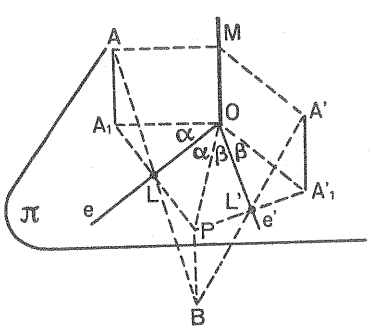


FIG. 29-4

Recíprocamente: *un giro se puede descomponer de infinitas formas en el producto de dos simetrías axiales.*

En efecto, trazado un eje cualquiera perpendicular al eje de giro, se halla el simétrico A' de un punto cualquiera A, perteneciente a F y trazando el eje mediatriz al segmento $A'A_1$ y perpendicular al eje de giro se tiene el otro eje de simetría; A_1 es el transformado de A en el giro.

5. El producto de simetrías axiales es asociativo. — En efecto, sean las simetrías axiales Se_1, Se_2 y Se_3 que se aplican sucesivamente a la figura F.

$$\left.\begin{array}{l} Se_1 \text{ transforma } F \text{ en } F' \\ Se_2 \text{ transforma } F' \text{ en } F'' \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (Se_1Se_2) \text{ transforma } F \text{ en } F'' \\ Se_3 \text{ transforma } F'' \text{ en } F''' \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow (Se_1Se_2)\,Se_3 \text{ transforma } F \text{ en } F'''$$

Ahora:

Se_1 transforma F en F' como antes.

Pero

$$\left.\begin{array}{l} Se_2 \text{ transforma } F' \text{ en } F'' \\ Se_3 \text{ transforma } F'' \text{ en } F''' \end{array}\right\} \Longrightarrow (Se_2Se_3) \text{ transforma } F' \text{ en } F'''$$

$$\Longrightarrow Se_1\,(Se_2Se_3) \text{ transforma } F \text{ en } F'''$$

Por consiguiente $(Se_1Se_2)\,Se_3 = Se_1\,(Se_2Se_3)$.

30. Simetrías respecto a planos en el espacio

1. Definición. — *Dado un plano* π (fig. 30-1), *llamaremos simetría respecto al plano* π, *o simetría especular, a la transformación que a un punto cualquiera* A *del espacio hace corresponder un punto* A′, *situado en la perpendicular por* A *al plano* π *y tal que* $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PA'}$, *siendo* P *la intersección de dicha perpendicular con el plano* π.

El punto P es homólogo de sí mismo y como éste es un punto cualquiera de π, resulta que todos los puntos de este plano son dobles.

El producto de dos simetrías respecto a un mismo plano de simetría es la identidad, es decir, esta transformación es *involutoria.*

Los planos y las rectas perpendiculares a π son dobles, pero no de puntos dobles y subordina en esos planos una simetría axial respecto de la recta de intersección del plano invariante con π.

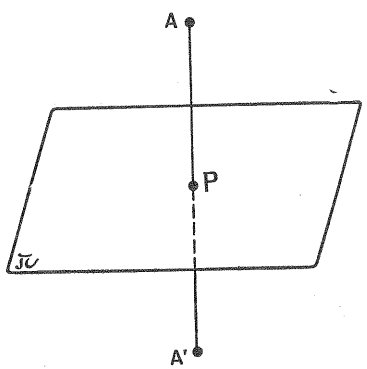


FIG. 30-1

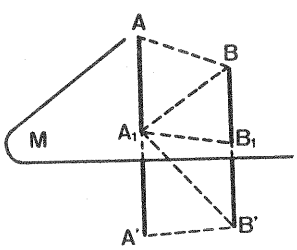


FIG. 30-2

La simetría respecto al plano no es un movimiento. En efecto, dos figuras simétricas F y F' respecto a un plano no son superponibles por un giro o traslación, ya que esta simetría invierte el sentido. Pero la figura F es superponible con la F'', simétrica de F' respecto a un nuevo plano de simetría. Por ejemplo, el guante de la mano derecha es igual y superponible al simétrico del guante de la mano izquierda.

2. Propiedades. — 1.ª *La simetría especular es una correspondencia biunívoca,* pues a un punto A no le corresponde más que otro punto A' como simétrico respecto a un plano.

2.ª *La simetría especular transforma parejas de puntos* A *y* B *en* A′ *y* B′, *de modo que las distancias* AB = A′B′.

En efecto, unamos A_1, con B y con B' (fig. 30-2), y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 = \text{común a triángulos} \\ BB_1 = B_1B' \\ \widehat{A_1B_1B} = \widehat{A_1B_1B'} = 90° \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{A_1BB_1} = \overset{\triangle}{A_1B_1B'} \Longrightarrow A_1B = A_1B'$$

y además

$$\left.\begin{array}{l} AA_1 = A_1A' \\ A_1B = A_1B' \\ \widehat{AA_1B} = \widehat{A'A_1B'}, \text{ por complemento de ángulos iguales} \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = A'B'$$

como se quería demostrar.

3.ª *Las simetrías especulares transforman puntos alineados en puntos alineados,* pues si A, B y C, pertenecientes a la figura F, son alineados, se puede poner:

$$AC = AB + BC \qquad [30\text{-a}]$$

y si A', B' y C' son sus homólogos en F', se tiene

$$\left.\begin{array}{l} AC = A'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \text{ recordando [30-a], resulta } \quad A'C' = A'B' + B'C'$$

que prueba que A', B' y C' también están alineados.

Por consiguiente, *también transforma puntos coplanarios en puntos coplanarios.* En efecto (fig. 30-3), supuesto que A, B, C y D son coplanarios, pertenecerán a un plano α y se tiene que la recta BD ha de cortar a la AC en L, por ejemplo.

Los puntos B', L' y D', homólogos de aquéllos, han de estar alineados y por consiguiente han de pertenecer al plano β, determinado por A', B' y C'.

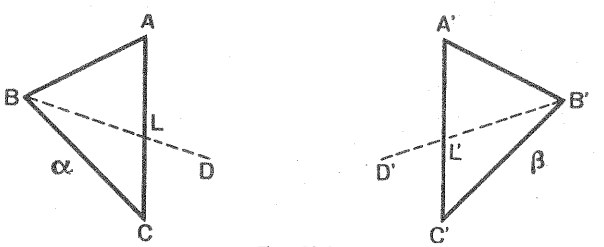


FIG. 30-3

4.ª *La simetría especular transforma segmentos en segmentos iguales, triángulos en triángulos inversamente iguales,* pues tienen sus lados iguales pero inversamente orientados. *Transforma ángulos en ángulos iguales,* pero también inversamente orientados. *Tetraedros en tetraedros inversamente iguales,* pues tienen sus caras, aristas y ángulos diedros respectivamente iguales, pero inversamente colocados, por lo que en general no son superponibles.

3. Teorema. — *El producto de dos simetrías respecto a dos planos paralelos, es una traslación, definida por un vector de módulo doble de la distancia de ambos planos y sentido del primero al segundo.*

Consideremos dos planos distintos π y π_1 (fig. 30-4). Un punto P de una figura F tiene por simétrico respecto a π el punto P' y éste a su vez tiene como simétrico respecto a π_1, el P''. Si O y O' son los puntos de intersección de la recta que contiene P y P' y P'' con π y π_1 respectivamente, se verifica:

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{OP} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{P'P''} = 2\overrightarrow{P'O'}$$

de donde se deduce

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = 2(\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'O'}) = 2\overrightarrow{OO'} = \text{constante}$$

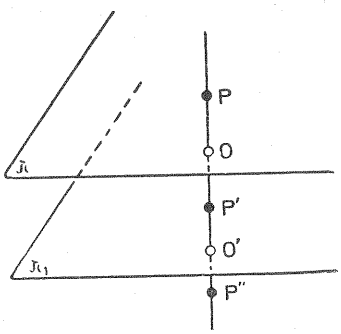


FIG. 30-4

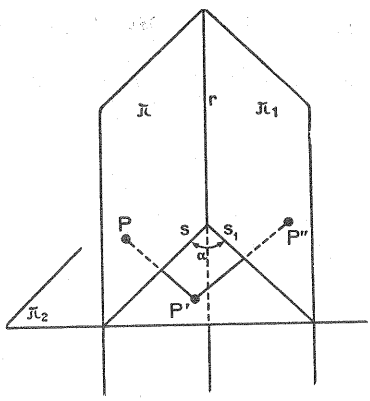


FIG. 30-5

4. Teorema. — *El producto de dos simetrías respecto a dos planos secantes* π *y* π_1 (fig. 30-5), *es un giro alrededor de la recta* r *intesección de* π *y* π_1 *y cuyo ángulo de giro es el doble del ángulo del giro de eie* r *que transforma* π *en* π_1, *y cuyo sentido es del primero al segundo plano.* El plano π_2 determinado por los tres puntos P, P' y P'' homólogos en las simetrías, es perpendicular a la recta r. Este plano corta a los planos según las rectas s y s_1 y según vimos en el plano se pasa de P a P'' por un giro de amplitud 2α, el doble del ángulo α que forman las rectas s y s_1, que por ser el rectilíneo del diedro formado por π y π_1, *demuestra el teorema*

31. Producto de traslaciones, giros y simetrías en el espacio

1. *El producto de dos simetrías axiales cuyos ejes* e_1 *y* e_2 *se cruzan, es igual al producto de un giro alrededor de la perpendicular común y amplitud igual al doble del ángulo que forma* e_1 *y* e_2, *por una traslación definida por un vector, cuyo módulo es doble que la mínima distancia entre* e_1 *y* e_2. *A esto se llama movimiento helicoidal.*

Sea en efecto e_1 y e_2 los ejes de las simetrías (fig. 31-1); trácese AO, perpendicular común de ambos ejes y por O dibújese una recta e paralela a e_1. El producto $S_{e_1}S_{e_2}$ no varía si se introduce un factor unidad representado por $S_eS_e = I$, por consiguiente, si $\alpha = \widehat{e_1e_2}$

$$S_{e_1}S_{e_2} = S_{e_1}IS_{e_2} = S_{e_1}S_e\,S_eS_{e_2}$$

Pero

$$\left.\begin{aligned} S_{e_1}S_e &= T_{2v} = T_{2\overrightarrow{AO}} \\ S_eS_{e_2} &= G_{2\alpha} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S_{e_1}S_{e_2} = G_{2\alpha}\ T_{2\overrightarrow{AO}}$$

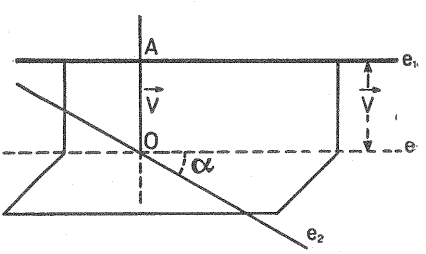


FIG. 31-1

Obsérvese que el giro es del sentido de e_1 a e_2.

El mismo razonamiento hubiera servido en el caso de que AO no fuera la mínima distancia entre los ejes, para probar que

$$S_{e_1}S_{e_2} = T_{2v}G_{2\alpha}$$

con la diferencia de que en este último caso el producto queda indeterminado, pudiéndose afirmar por lo tanto, que: *El producto de dos simetrías cuyos ejes se cruzan es de infinitos modos el producto de una traslación por un giro.*

2. **Producto de dos giros con ejes que se cruzan.** — *El producto de dos giros con ejes que se cruzan es igual al producto, de infinitas formas, de una traslación por otro giro.*

En efecto, sean los giros G_{α_1} y G_{α_2}, cuyos respectivos ejes son (fig. 31-2) e_1 y e_2, que no son paralelos ni se cortan. Trácese la perpendicular común O_1O_2 por la mínima distancia de ambos ejes, de modo que O_1 y O_2 son las respectivas intersecciones de cada eje con dicha perpendicular.

Hállese la transformada de O_1O_2 en dos giros, respectivamente, de eje e_1 y amplitud $\frac{\alpha_1}{2}$, el primero y eje e_2 y amplitud $-\frac{\alpha_2}{2}$, el segundo; y sean esas respectivas transformadas O_1M_1 y O_2M_2, perpendiculares respectivamente a e_1 y e_2.

Ahora podremos descomponer G_{α_1} en dos simetrías axiales cuyos ejes sean precisamente O_1M_1 y O_1O_2 y el giro G_{α_2} en otras dos simetrías con ejes O_1O_2 y O_2M_2. Con esto tendremos, recordando 29-5

$$G_{\alpha_2}G_{\alpha_1} = S_{O_2M_1} \cdot S_{O_1O_2} \cdot S_{O_1O_2} \cdot S_{O_1M_1} = S_{O_2M_2} \cdot S_{O_1M_1} \qquad [31\text{-a}]$$

que según (31-1), representa un giro por una traslación o un movimiento helicoidal de infinitas formas

$$G_{\alpha_2}G_{\alpha_1} = T_{2\overrightarrow{O_2O_1}} \cdot G_{2\alpha}$$

La traslación en esta transformación es determinada, $T_{2\overrightarrow{O_2O_1}}$ y el giro también, pues su eje será O_2O_1 y su amplitud el ángulo $2\hat{e_2e_1}$ = áng. (O_2M_2, O_1M_1).

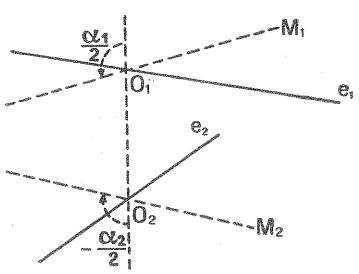


FIG. 31-2

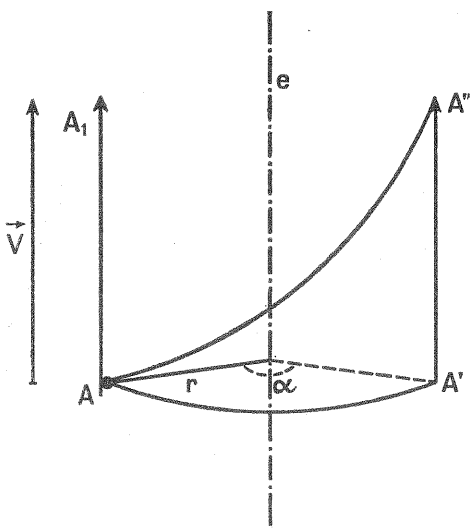


FIG. 31-3

3. Movimiento helicoidal. — Según (31-1), *podemos definir el movimiento helicoidal como el producto de un giro axial por una traslación paralela al eje de giro* (fig. 31-3).

El eje de giro se denomina *eje del movimiento helicoidal.*

La simple inspección de la figura nos convence de que el producto de una traslación por un giro en el movimiento helicoidal es conmutativo, es decir, que

$$G_\alpha \cdot T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} G_\alpha \qquad [31\text{-b}]$$

En la misma figura se puede observar que siendo r la distancia de un punto cualquiera al eje de giro, se puede escribir, siendo A'' el transformado por el movimiento, de la traslación $\vec{V}$ y del giro cuya amplitud es α

$$\overline{AA''}^2 = V^2 + \overline{AA'}^2 = V^2 + 4r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

En esta expresión $V \neq 0$, pues de lo contrario el movimiento no sería helicoidal, sino un mero giro; si $\alpha = 0$, no habría más que una traslación. No hay posibilidad de que $\overline{AA''} = 0$, lo que supondría $A \equiv A''$. Es decir, que en el movimiento helicoidal no existen puntos dobles.

4. Producto de una simetría central por por otra especular. — El producto de una simetría *central por otra especular, es en general un movimiento helicoidal.*

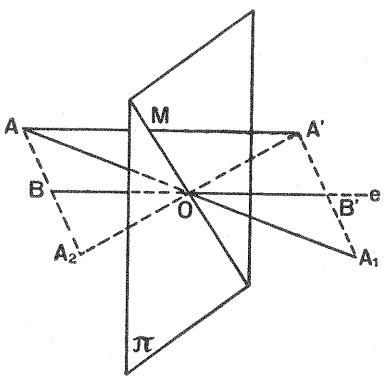


FIG. 31-4

En efecto, la simetría S_π respecto al plano π, se le puede descomponer en una simetría S_0 central respecto a O, punto cualquiera del plano, por una simetría S_e respecto a un eje perpendicular al plano por O (fig. 31-4).

Así, un punto A cualquiera de la figura F, se transforma mediante la simetría especular en A' de la figura simétrica, pero también se transforma en ese mismo punto, mediante la aplicación sucesiva de la simetría central O, que le hace corresponder A_1 y la simetría axial respecto a e, que transforma A_1 en A', pues es fácil ver que

$$\overrightarrow{A_1B'} = \overrightarrow{B'A'}$$

Este producto es conmutativo, como se ve en la figura. Se puede poner para este caso,

$$S_\pi = S_0 S_e = S_e S_0$$

Pero si O' es el centro de la simetría central factor, se tiene

$$S_{0'} S_\pi = S_{0'} S_0 \cdot S_e = T_{2\,\overrightarrow{O'O}} S_e$$

que es un movimiento helicoidal, pues una simetría axial S_e es un giro de amplitud π.

Nótese que O ha sido elegido arbitrariamente en el plano, por consiguiente, habrá infinidad de productos.

5. *Todo movimiento helicoidal se puede descomponer de infinitos modos en productos de dos simetrías axiales.* — En efecto, sea $T_{\vec{v}}$ y G_α la traslación y giro que definen al movimiento helicoidal (fig. 31-5) y e el eje. Tomemos dos puntos cualesquiera en e, P_1 y P_2, de modo que $2\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{V}$ y tracemos sendas perpendiculares r_1 y r_2 a dicho eje por esos puntos, de modo que $\widehat{r_1 r_2} = \frac{\alpha}{2}$. Además, por P_2 trácese $r \parallel r_1$, se tiene entonces:

$$\left.\begin{aligned} T_{\vec{v}} &= S_{r_1}S_r \\ G_\alpha &= S_rS_{r_2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M = T_{\vec{v}}G_\alpha = S_{r_1}S_r\,S_rS_{r_2} = S_{r_1}IS_{r_2} = S_{r_1}S_{r_2}$$

que demuestra lo que deseábamos. Pero como P_1 y P_2 son arbitrarios, para cada pareja resultará una solución diferente.

6. *El producto de dos movimientos helicoidales es un movimiento helicoidal único.* — En efecto,

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= T_{\vec{v}_1}G_{\alpha_1} \\ M_2 &= T_{\vec{v}_2}G_{\alpha_2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M_1M_2 = T_{\vec{v}_1}G_{\alpha_1}T_{\vec{v}_2}G_{\alpha_2} = T_{\vec{v}_1}T_{\vec{v}_2}G_{\alpha_1}G_{\alpha_2} = T_{\vec{v}_1+\vec{v}_2}G_{\alpha_1+\alpha_2}$$

Por consiguiente, podemos afirmar que el producto de cualquier número de movimientos helicoidales es un movimiento helicoidal único.

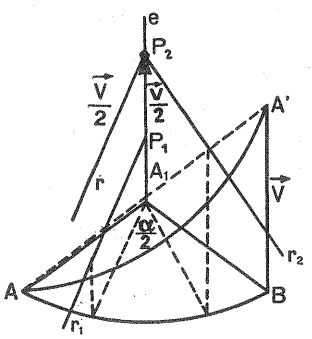


FIG. 31-5

Pues el producto de traslaciones y giros es conmutativo (31-3) y, además, es asociativo, ya que se reduce a un producto de simetrías axiales.

32. Geometría de la superficie esférica

1. Definiciones. — *Se llama superficie esférica al lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto* O, *llamado centro.*

Si una circunferencia *E* (fig. 32-1), gira alrededor de uno de sus diámetros *PP'*, engendra una superficie esférica, pues en cualquier posición los puntos de la circunferencia equidistan de su centro, que lo será de la esfera.

El espacio sólido limitado por la superficie esférica se denomina esfera.

El segmento *R*, que une un punto cualquiera de la superficie esférica con su centro, se denomina *radio, OC* de la figura 32-2, y el segmento que une dos puntos de dicha superficie, pasando por el centro, se llama *diámetro, PP'* de la figura 32-1.

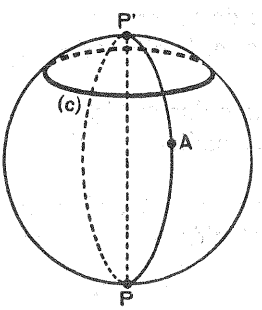


FIG. 32-1

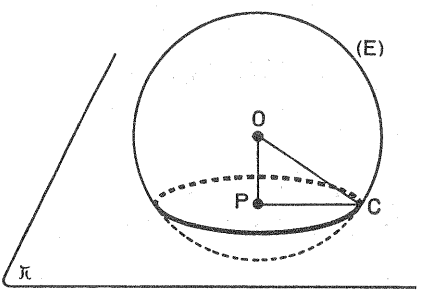


FIG. 32-2

Todo plano que pasa por el centro se llama *plano diametral,* y corta a la superficie esférica en una circunferencia, llamada *circunferencia máxima,* que tiene por radio precisamente el mismo radio de la esfera (fig. 32-3).

La esfera divide al espacio en dos regiones, una constituida por los puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio y se llama *región exterior,* y la otra, *región interior,* formada por los puntos cuya distancia al centro es menor que *R*. Los puntos de la superficie esférica constituyen los *puntos frontera* entre ambas regiones.

Según esto, una recta podrá ser *exterior, tangente* o *secante* a una esfera, según que su distancia al centro sea *mayor, igual* o *menor* que el radio de la esfera. En efecto, la recta *r* y el centro *O,* determinan el plano π (fig. 32-3), que corta a la esfera en la circunferencia máxima (*c*), la cual ocupa la misma posición respecto a *r,* que respecto a la esfera, ya que la distancia de la recta al centro es la misma en ambas figuras.

Lo mismo se puede decir de un plano respecto a una esfera (fig. 32-2).

2. Secciones planas de una esfera. — *La sección producida en una esfera de radio* R *por un plano* π, *cuya distancia al centro es* $d < R$, *es una circunferencia.*

En efecto, si P es el pie de la perpendicular a π por O (fig. 32-2), se tiene en el triángulo rectángulo OPC, para cualquier punto C, común al plano y a la superficie esférica,

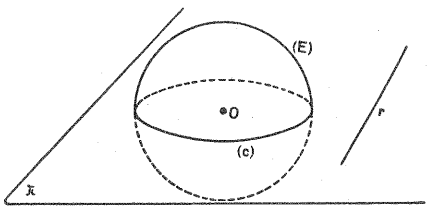


FIG. 32-3

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{PO}^2}$$

o bien $$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

siendo $OC = R$ y $PO = d$, constantes, también lo será r, por lo que los puntos C, pertenecen a una circunferencia de centro P y radio r.

Un plano que corta a una esfera, la divide en dos partes, llamadas *casquetes esféricos*. Si el plano es diametral, los casquetes son iguales y se denominan *hemisferios*. (Demuéstrese que los hemisferios son iguales superponiéndolos por giro alrededor de un diámetro contenido en el plano base común).

Dos planos paralelos que cortan a una esfera, delimitan entre ellos una parte de esfera que se denomina *segmento esférico* y la parte de superficie esférica que la recubre, *zona esférica*. La distancia entre ambos planos es la *altura del segmento* y de la *zona esférica* (fig. 32-4).

Cuña esférica es la parte de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que se cortan; la parte de superficie esférica correspondiente es el *huso esférico* (fig. 32-5).

Sector esférico es la parte de esfera engendrada por un sector circular OAB, que gira alrededor de un diámetro DE, que no está contenido en aquél (fig. 32-4).

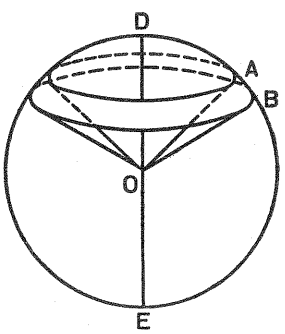


FIG. 32-4

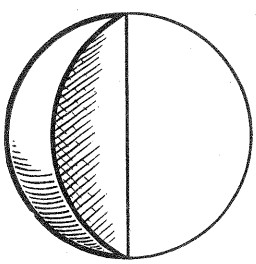


FIG. 32-5

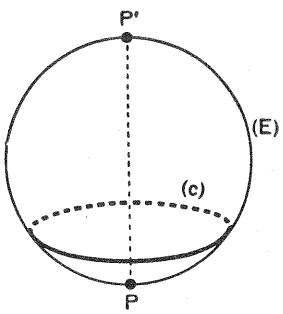


FIG. 32-6

3. Consecuencias. — 1.ª Puesto que toda circunferencia trazada en una esfera determina un plano que la corta, podremos afirmar que *en una esfera, dos circunferencias tienen a lo más dos puntos comunes,* extremos de la cuerda común a las circunferencias y a la esfera (fig. 32-5).

2.ª Se denomina *polo* de una esfera respecto de una de sus circunferencias, a los extremos del diámetro perpendicular al plano de la citada circunferencia; P

y P' en la figura 32-6. Es fácil ver que los puntos de esa circunferencia equidistan de cada uno de los polos correspondientes.

3.ª Para trazar una circunferencia en una esfera, nos servimos del compás de ramas curvas. Apoyemos para ello una de sus ramas en un punto A, cualquiera de la esfera y giremos a su alrededor la otra rama, provista de un lápiz o tiza; al apoyarla en la superficie esférica irá trazando la circunferencia, pues si B es un punto y por él trazo un plano π, perpendicular al diámetro que pasa por A, los puntos señalados B, estarán a la vez en π y en la esfera (fig. 32-7) y equidistarán de H por ser pies de oblicuas AB, iguales.

4. Ángulos y distancias en la esfera. — Cuando dos arcos de circunferencias trazadas en la superficie de una esfera se cortan, diremos que forman, en el punto común, un ángulo cuyo valor viene dado por el de las tangentes a ambas circunferencias en dicho punto. Así, en la figura 32-8 los arcos ACB y ECF, que se cortan en C, forman un ángulo cuyo valor es el del rectilíneo MCN. Si las circunferencias son máximas, se cortan en los extremos de un diámetro, pues los planos de ambas circunferencias pasan por el centro de la esfera. Por consiguiente, el ángulo formado por las tangentes en el punto común, es el rectilíneo correspondiente al diedro de ambos círculos, pues las tangentes son perpendiculares al diámetro, arista del diedro.

Dos circunferencias de una esfera son perpendiculares cuando forman un ángulo recto (fig. 32-1).

TEOREMA: *Si dos circunferencias máximas de una esfera son perpendiculares, cada una de ellas pasa por el polo correspondiente a la otra.*

En efecto, los planos de ambas circunferencias son perpendiculares, por consiguiente el plano de una ha de contener todas las perpendiculares al plano de la otra, trazadas por los puntos de intersección de ambos planos, y una de esas perpendiculares es el diámetro, que contiene los polos correspondientes a la segunda circunferencia.

Se denomina *distancia esférica* entre dos puntos A y C, de una esfera (fig. 32-8), al menor de los arcos de circunferencia máxima que pasa por ellos. Se mide indistintamente en unidades angulares, AOC o por la longitud del arco AC.

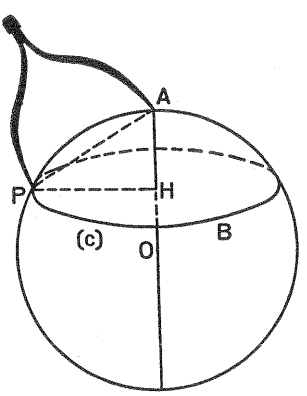


FIG. 32-7

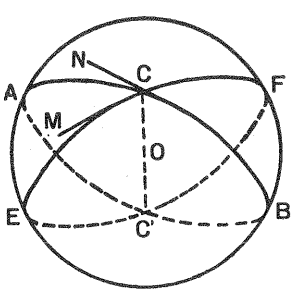


FIG. 32-8

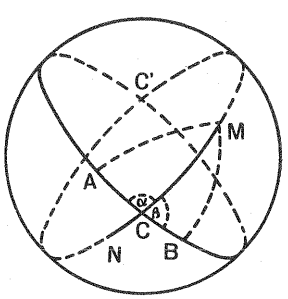


FIG. 32-9

Esta distancia es determinada, pues por dos puntos de la superficie esférica no puede pasar más que una circunferencia máxima, la correspondiente al plano determinado por esos puntos y el centro.

Igualmente, denominamos *distancia esférica de un punto* A *de la superficie esférica a un arco* MN (fig. 32-9), al arco de circunferencia máxima AC, que pasando por A sea perpendicular a dicho arco.

5. Ciclo mediatriz y ciclo bisectriz. — 1.° *Llamamos ciclo mediatriz o mediatriz esférica de un arco máximo o ciclo, a otro ciclo perpendicular al primero en su punto medio.*

Así, en la figura 32-9, $\widehat{CM}$ es mediatriz esférica de $\widehat{AB}$, porque

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \beta = 90°$$

Teorema: *Los puntos de la mediatriz esférica a un ciclo* $\widehat{AB}$, *equidistan de los extremos del ciclo* A *y* B.

En efecto, dibujemos la figura $A'B'C'$, simétrica de ABC respecto a un plano diametral $\widehat{PQ}$ (figura 32-10).

Existe un movimiento que hace coincidir $\widehat{B'A'}$ con $\widehat{AB}$ y M' con M y por consiguiente $\widehat{C'M'}$ con $\widehat{CM}$, por la igualdad de los ángulos y $\hat{C}'$ con $\hat{C}$, por ser $\widehat{M'C'}$ simétrico de $\widehat{MC}$, $\widehat{MC} = \widehat{M'C'}$, ya que son iguales las cuerdas por simetría.

De aquí

$$\widehat{AC} = \widehat{B'C'} = \widehat{BC} \Longrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

como se quería demostrar.

El ciclo CM ha de contener la perpendicular bajada desde C al plano de $\widehat{AB}$, luego es único.

Recíprocamente, *un punto* C, *que equidista esféricamente de los extremos* A *y* B *de un ciclo, pertenece a su mediatriz esférica.*

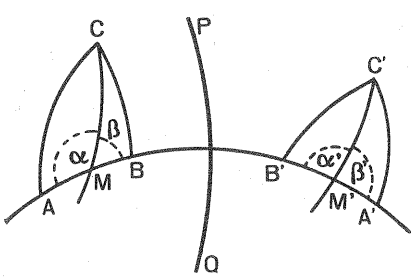


FIG. 32-10

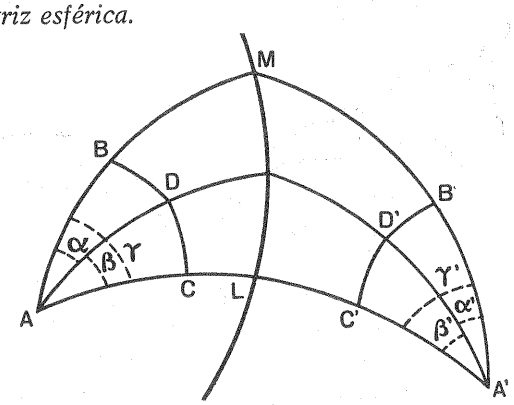


FIG. 32-11

En efecto, lo mismo que antes, trazado el ciclo por $\widehat{CM} \perp \widehat{AB}$, y trazada la figura simétrica respecto al plano $\widehat{PQ}$, podemos afirmar que existe un movimiento que hace coincidir $\widehat{B'A'}$ con $\widehat{AB}$ y $\widehat{C'M'}$ con $\widehat{CM}$, pues desde $C \equiv C'$ no se puede trazar a $\widehat{AB} \equiv \widehat{A'B'}$ más que un ciclo perpendicular, por consiguiente,

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

$$\widehat{AM} = \widehat{B'M'} = \widehat{MB} \Longrightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB}$$

lo que prueba que $\widehat{CM}$ es la mediatriz esférica.

2.° *Llamamos ciclo bisectriz o bisectriz esférica de un ángulo esférico, a un ciclo que divide el ángulo en dos ángulos iguales.*

Así, $\widehat{AD}$ es bisectriz esférica de γ si $\alpha = \beta$.

Teorema: *Cualquier punto* D *de la bisectriz esférica equidista de los lados del ángulo.* Hemos de probar que siendo D un punto cualquiera de la bisectriz, será $\widehat{BD} = \widehat{DC}$, si $\widehat{BD} \perp \widehat{AB}$ y $\widehat{DC} \perp \widehat{AC}$.

Tracemos un ciclo LM (fig. 32-11), que corte a los lados del ángulo BAC dado y dibujemos su simétrico $B'A'C'$ respecto al plano de ese ciclo. Puesto que $\gamma = \gamma'$, existe un movimiento de giro alrededor del centro de la esfera que hace coincidir los dos ángulos y al mismo tiempo sus mitades, es decir, α con β' y el punto D con D', por ser $AD = A'D'$.

Por consiguiente, $\widehat{BD}$ coincidirá con $\widehat{C'D'}$, pues de lo contrario desde D tendríamos trazados dos ciclos perpendiculares al plano PAC, que no tiene por polo a D.

De aquí que

$$\widehat{BD} = \widehat{C'D'} = \widehat{DC} \Longrightarrow \widehat{BD} = \widehat{DC}$$

como se quería demostrar.

Recíprocamente. *Un punto cualquiera de la superficie esférica que equidista esféricamente de los lados de un ángulo* γ, *pertenece a la bisectriz esférica.* En efecto, por hipótesis

$$\widehat{BD} = \widehat{DC}$$

Tracemos el ciclo $\widehat{DA}$ y dibujemos el simétrico de γ con respecto al plano que corresponde al ciclo $\widehat{ML}$, y, luego, mediante un giro alrededor de O_1 centro de la esfera (no dibujada) llevemos el ángulo en D' sobre D, y coincidirán pues son iguales por simetría. Esto lleva consigo la coincidencia de B' con C y C' con B, y por consiguiente, $A'B'$ con CA y $C'A'$ con BA, y por tanto, A con A' y $D'A'$ con DA.

Esto implica que

$$\alpha = \beta' = \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$$

como se quería demostrar.

6. Construcciones. — 1.ª *Trazar el arco mediatriz de un arco cualquiera dibujado en una esfera.*

Sea el arco $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 32-9). Mediante el compás de ramas curvas, con radio mayor que la mitad de $\overset{\frown}{AB}$, y haciendo centro sucesivamente en A y B, se trazan los arcos que se cortan en M y N. El círculo máximo que estos puntos determinan, que es único, resuelve el problema.

En efecto, el plano de este círculo máximo $NCMC'$, tiene tres puntos, M, N y O que equidistan de A y B, por consiguiente, es el plano mediatriz de la cuerda AB, recta contenida en el plano del arco $\overset{\frown}{AB}$, es decir, que los planos de ambas circunferencias son perpendiculares. Otro arco mediatriz de $\overset{\frown}{AB}$ pertenecería a un plano mediatriz de la cuerda AB, luego coincide con el anterior.

2.ª *Trazar el plano bisectriz de un ángulo esférico formado por dos circunferencias máximas.*

Sea el ángulo esférico $\widehat{ABC}$, en la figura 32-12. Haciendo centro en el vértice B y con un radio esférico cualquiera, se traza el arco $\overset{\frown}{DF}$. Luego, haciendo centro sucesivamente en D y F y con un radio mayor que la mitad de $\overset{\frown}{DF}$, se trazan dos arcos, que se cortan en M.

La circunferencia máxima determinada por M y B, resuelve el problema, pues estos dos puntos pertenecen al ciclo bisectriz.

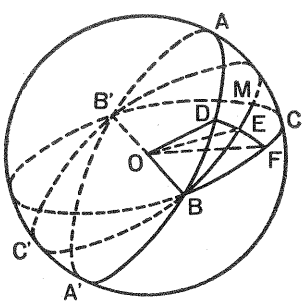


FIG. 32-12

3.ª *Trazar sobre una esfera la circunferencia menor que pase por tres puntos dados* A, B *y* C.

Tracemos dos círculos máximos mediatrices a los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$, y el punto donde se cortan, equidista de A, B y C y por consiguiente es el polo de la circunferencia pedida. Ahora sólo resta hacer centro en ese polo y con abertura hasta B, trazar la circunferencia pedida.

7. Determinación del radio de una esfera. — 1.º Desde un punto cualquiera E, de la superficie esférica, como polo (fig. 32-13-*a*), se traza una circunferencia menor $DABC$, en la que se señalan tres puntos A, B y C. Tomadas las distancias AB, BC y CA, mediante el compás esférico, se puede reproducir en un papel aparte el triángulo ABC (fig. 32-13-*b*) y por consiguiente, dibujar el círculo circunscrito, cuyo radio es $HD = r$. Mediante el compás esférico se mide la distancia $DE = D'E'$, que nos permite construir el triángulo rectángulo $DHE = D'H'E'$ (fig. 32-13-*c*). Sólo resta trazar $D'F'$, perpendicular a $D'E'$ y obtendremos $E'F' = EF$, diámetro de la esfera.

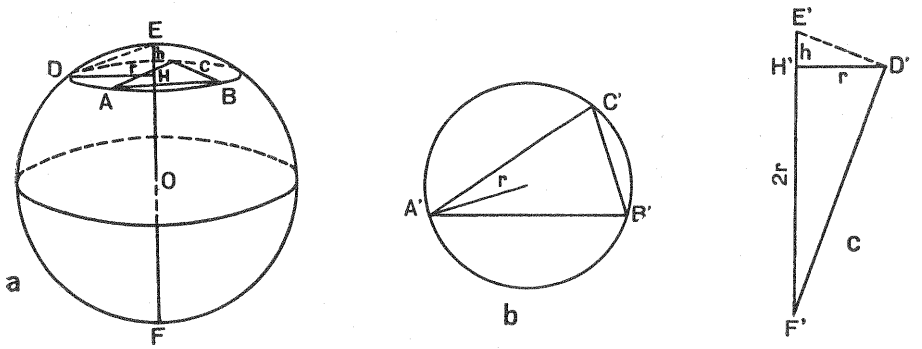


FIG. 32-13

2.° Más corto sería señalar tres puntos de una circunferencia máxima, con el procedimiento empleado para trazar el círculo mediatriz. Estos puntos nos permiten trazar el triángulo cuyo círculo circunscrito es el círculo máximo de la esfera.

8. Determinación de una esfera. — 1.° *Cuatro puntos* A, B, C *y* D *no coplanarios, determinan una esfera* (fig. 32-14).

Para demostrarlo, es suficiente probar que por esos cuatro puntos pasa una esfera y sólo una.

Todo punto equidistante de *A, B* y *C* está en *p* y sólo en *p*, perpendicular al plano del triángulo *ABC*, por su circuncentro, pues los vértices se apartan igual de *H*, pie de *p*. De la misma manera *p'* contiene todos los puntos que equidistan de *B, C* y *D*.

Por consiguiente, si *p* y *p'* se cortan en un punto *O*, ese será el centro de una esfera que pasa por *A, B, C* y *D*. Veamos que realmente se cortan:

El plano mediatriz de *BC* pasa por *H* y *H'*, pues ambos equidistan de *B* y *C* y como dicho plano es perpendicular a cada uno de los planos de ambos triángulos, por serlo a una recta *BC*, en cada uno de ellos contenida, este plano mediatriz contendrá a *p* y *p'*, los cuales por esta causa y no ser paralelas, se han de cortar en un solo punto *O*, centro buscado. El punto *O* es único, pues los puntos que equidistan en cada triángulo de sus vértices están todos en la respectiva perpendicular, por consiguiente también es única la esfera. De aquí deducimos que *un tetraedro es siempre inscriptible en una esfera y que las perpendiculares a sus caras por el circuncentro se cortan en un punto, que es precisamente el centro de la esfera.*

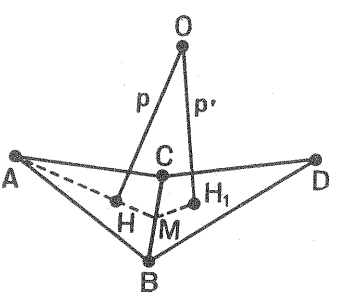


FIG. 32-14

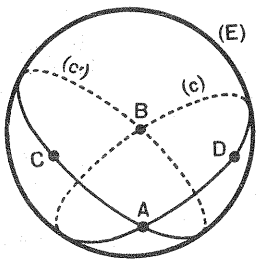


FIG. 32-15

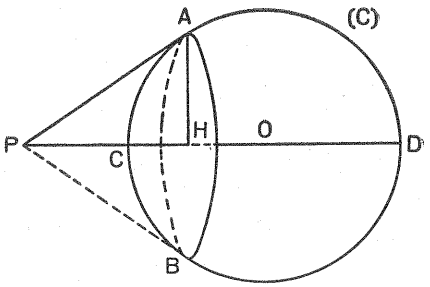


FIG. 32-16

2.° *Dos circunferencias no coplanarias y con una cuerda común* AB, *determinan una esfera.*

En efecto (fig. 32-15), considerados los puntos *A* y *B* y otro en cada circunferencia *C* y *D*, estamos en el caso anterior.

9. Cono y cilindro circunscrito a la esfera. — 1.° *Desde un punto exterior* P, *como vértice, se puede trazar una superficie cónica circunscrita a una esfera.*

En efecto, unamos *P* con *O*, centro de la esfera y hagamos pasar por *P* y *O* un plano (el del dibujo), que corta a la esfera (fig. 32-16). Trácese desde *P* una tangente a la circunferencia máxima (*C*) obtenida y al hacer girar la figura alrededor de *PO*, la circunferencia engendra la superficie esférica, la tangente *PA*, engendra el cono y *A* engendra un círculo menor constituido por los puntos de tangencia entre el cono y la esfera. Obsérvese que *AH*, perpendicular a *PO*, engendra un plano, base del cono.

2.° *Dada una dirección, es posible trazar una superficie cilíndrica circunscrita a una esfera dada.*

Sea *r* la dirección y *O* el centro de la esfera (fig. 32-17). Trazando el plano determinado por *r* y *O*, cortará a la esfera en una circunferencia máxima. A ésta se le traza la tangente *r'*, paralela a *r*. Sólo resta girar la figura así obtenida alrededor del diámetro *CD*, paralelo a *r*, y entonces (*C*) engendrará la esfera, *r'* la superficie cilíndrica buscada y *A* una circunferencia máxima constituida por los puntos de tangencia de ambas figuras.

9. Posiciones relativas de dos esferas. — 1.° *Dos esferas cuyas superficies no tengan ningún punto común, serán exteriores o interiores, según que la distancia de sus centros sea mayor que la suma de sus radios o menor que su diferencia.*

2.° *Dos esferas, cuyas superficies tengan un punto común en la recta que une los centros, serán tangentes exterior o interiormente, según que la distancia de los centros sea igual a la suma o diferencia de los radios, respectivamente.*

3.° *Dos esferas cuyas superficies tengan un punto común fuera de la recta que une los centros, serán secantes y sus superficies se cortan en una circunferencia.*

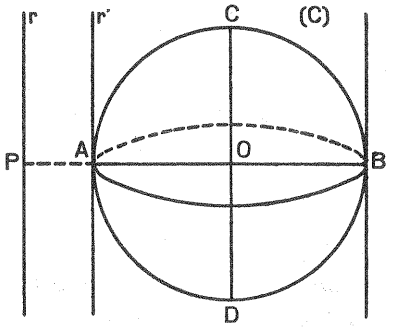


FIG. 32-17

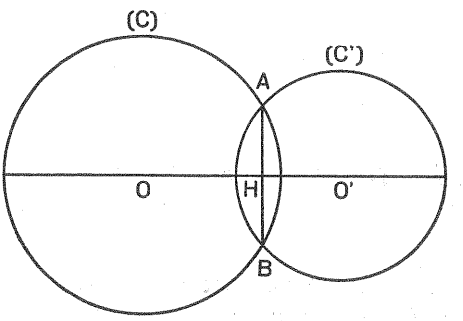


FIG. 32-18

Demostraremos este último caso y dejaremos para el lector la demostración de los dos primeros, que se puede hacer de idéntica manera.

Supongamos (fig. 32-18), las esferas O y O', que tienen común el punto A no perteneciente a OO'. Por A, O y O' pasa un plano que corta a las dos esferas en dos círculos máximos, cuyas circunferencias son (C) y (C').

Hagamos girar el conjunto de las figuras alrededor de OO', y entonces (C) engendra la esfera O, (C') la O', AH engendra un plano perpendicular a OO' y finalmente A engendra una circunferencia que pertenece a ambas esferas, pues en cualquier posición A pertenece a ambas esferas.

De aquí deducimos que la recta que une los centros es perpendicular al plano de ambas esferas.

33. Triángulos esféricos

1. Ángulo poliedro. Polígono esférico. — *Llamamos ángulo poliedro a la figura formada por varias semirrectas* a, b, c, d, e, *dadas en un orden determinado y que tienen un origen común* V (fig. 33-1).

Las semirrectas se denominan *aristas;* los planos *ab, bc,* ... determinados por cada par de aristas consecutivas, son las *caras;* cada dos caras consecutivas determinan un *diedro,* que designaremos ordinariamente con la letra de su arista, y por fin el punto común *V* de las aristas es el vértice del ángulo poliedro. Designaremos el ángulo poliedro con la letra del vértice, seguida de las letras de sus aristas, así: *VABCDE,* o bien *Vabcde.*

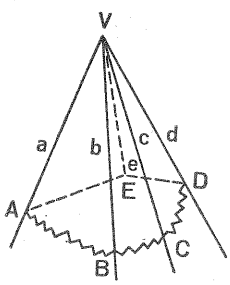


FIG. 33-1

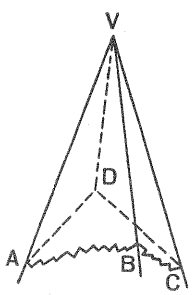


FIG. 33-2

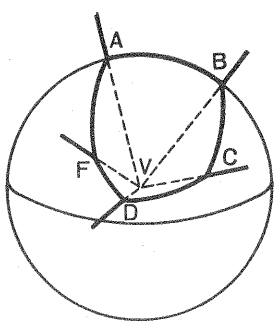


FIG. 33-3

Un ángulo poliedro es *convexo,* si toda la figura queda en el mismo semiespacio correspondiente a cada una de sus caras; por ejemplo (fig. 33-1), y en caso contrario (fig. 33-2), es *cóncavo.* Al espacio delimitado por un ángulo poliedro, lo denominamos ángulo sólido.

Si tomamos como centro de una esfera (fig. 33-3), el vértice *V* de un ángulo poliedro, las caras, por ser planos diametrales, cortarán a la superficie esférica en arcos de circunferencia máximos, que a su vez se cortarán en los puntos de intersección de las aristas con la superficie esférica. La figura esférica así formada, se denomina *polígono esférico,* cuyos lados son los arcos determinados por las caras del ángulo poliedro y los vértices, las intersecciones de las aristas con la superficie esférica. Si por un vértice trazamos tangentes a la superficie esférica, contenidas en las caras del ángulo poliedro, dichas tangentes forman ángulos iguales a los que forman los lados correspondientes; por otra parte, por ser dichas tangentes perpendiculares a la arista correspondiente, el citado ángulo es el rectilíneo correspondiente al diedro del ángulo poliedro.

En resumen, un polígono esférico es la parte de superficie esférica determinada por un ángulo poliedro, cuyo vértice coincide con el centro de la esfera. Las caras del ángulo poliedro forman los lados del polígono y tienen igual medida; los diedros forman los ángulos del polígono y tienen igual medida también.

La unidad del ángulo sólido es el *estereoradián*, que es el ángulo sólido con que se ve, desde el centro de una esfera de radio unidad, una unidad de superficie localizada en dicha esfera.

2. Relación de los lados y ángulos de un triángulo esférico. — Teorema 1.°: *En todo triángulo esférico, a ángulos iguales, se oponen lados iguales.*

En efecto, sea el triángulo ABC, trácese su simétrico con respecto al plano diametral $\widehat{DE}$ perpendicular a AB y resulta el triángulo $A'B'C'$ (fig. 33-4).

Por hipótesis $\hat{A} = \hat{B}$, se desea demostrar que $\widehat{AC} = \widehat{BC}$.

Existe un movimiento que hace coincidir $\widehat{B'A'}$ con $\widehat{AB}$ y al mismo tiempo $\widehat{B'C'}$ con $\widehat{AC}$ y $\widehat{A'C'}$ con $\widehat{BC}$ por la igualdad $\widehat{AB} = \widehat{B'A'}$, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{B}' = \hat{A}'$, por consiguiente

$$\widehat{AC} = \widehat{B'C'} = \widehat{CB} \Longrightarrow \widehat{AC} = \widehat{CB}$$

como se quería demostrar.

Recíprocamente: *En un triángulo esférico, a lados iguales* $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, *se oponen ángulos iguales* $\hat{A} = \hat{B}$. En efecto, el producto de la simetría anterior por un movimiento, nos permite poner

$$\widehat{AC} = \widehat{BC} \Longrightarrow \widehat{A'C'} = \widehat{BC} = \widehat{B'C'} = \widehat{C'A'} \Longrightarrow \overline{AC} = \overline{CB} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$$

y como $\overline{AB} = \overline{B'A'}$, resulta que los triángulos planos

$$ABC = B'C'A'$$

por lo que un movimiento los puede hacer coincidir y entonces coincidirán los triángulos esféricos, lo cual lleva consigo que

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B}' \text{ porque coinciden} \\ \hat{B} = \hat{B}' \text{ porque son simétricos} \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

como se quería demostrar.

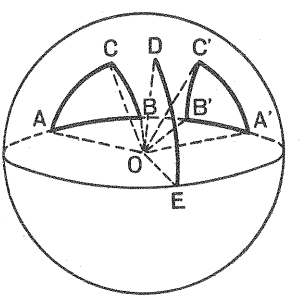


FIG. 33-4

Teorema 2.°: *En un triángulo esférico, a mayor ángulo,* $\hat{\gamma} > \hat{A}$, *se opone mayor lado* $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$.

En efecto, trácese (fig. 33-5)

$$\text{ángulo } \alpha = \text{ángulo } A$$

de modo que ha de ser $\hat{\alpha} < \hat{\gamma}$, pues $\hat{\gamma} > \hat{A}$.

El ciclo $\overset{\frown}{MC}$, por ser interior a γ, ha de cortar a $\overset{\frown}{AB}$, por ejemplo en M, de modo que

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MC}$$

según el teorema anterior; por consiguiente M pertenece a la mediatriz esférica de $\overset{\frown}{AC}$.

Sea P la intersección de la cuerda $\overline{AB}$ con el plano mediatriz $\overset{\frown}{MD}$, entonces

$$\overline{AP} = \overline{PC} \Longrightarrow \overline{CB} < \overline{CP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} \Longrightarrow \overset{\frown}{CB} < \overset{\frown}{AB}$$

como se quería demostrar.

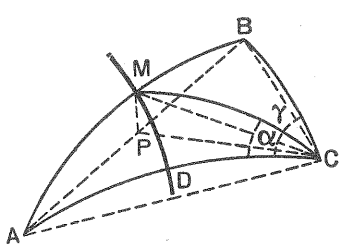


FIG. 33-5

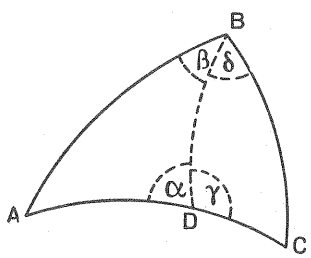


FIG. 33-6

Recíprocamente: *En un triángulo esférico, a mayor lado* $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$, *se opone mayor ángulo* $\hat{C} > \hat{A}$.

En efecto, examinemos las relaciones posibles entre $\hat{C}$ y $\hat{A}$

$\hat{C} < \hat{A}$, imposible, porque supondría $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$

$\hat{C} = \hat{A}$, imposible, porque supondría $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

sólo queda $\hat{C} > \hat{A}$, con lo que queda demostrado el teorema.

3.° *En todo triángulo esférico, un lado es menor que la suma de los otros dos.*

En efecto, sea el triángulo ABC (fig. 33-6), al que le dibujamos un ciclo de modo que $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ y $\hat{\gamma} > \hat{\delta}$, lo cual es siempre posible, pues $\hat{B} < 180°$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En el triángulo } ABD \text{ se tiene } \widehat{AB} > \widehat{AD} \\ \text{En el triángulo } BDC \text{ se tiene } \widehat{BC} > \widehat{DC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} > \widehat{AD} + \widehat{DC} = \widehat{AC}$$

que es lo que se quería demostrar.

3. Valor de los lados y ángulos de un triángulo esférico. — Teorema 1.°: *La suma de los lados de un triángulo esférico, es menor que cuatro rectos.*

En efecto, sea el triángulo ABC (fig. 33-7), prolónguese $\widehat{BA}$ hasta M y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{BA} + \widehat{AM} = BLM \\ \widehat{AC} < \widehat{AM} + \widehat{MC} \\ \widehat{CB} = \widehat{BC} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando m. a m.} \\ \widehat{BA} + \widehat{AC} + \widehat{CB} < BLM + \widehat{MC} + \widehat{CB} = 4 \text{ rectos} \end{array}$$

como se quería demostrar.

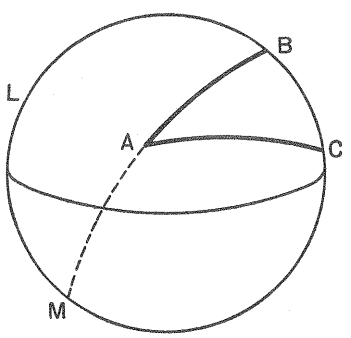


FIG. 33-7

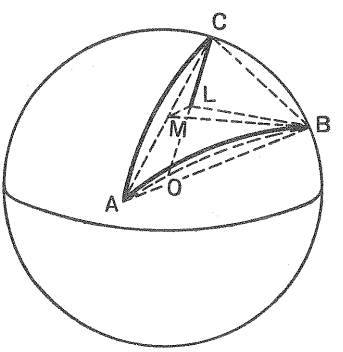


FIG. 33-8

Teorema 2.°: *La suma de los ángulos de un triángulo esférico, está comprendida entre dos y seis rectos.*

En efecto, cada ángulo ha de ser menor que dos rectos, por consiguiente los tres ángulos han de sumar menos de seis rectos.

Demostremos que suman más que dos rectos. Para ello (fig. 33-8), dibujemos el triángulo rectilíneo ABC, formado con las cuerdas y tracemos desde B el plano BML, perpendicular al radio CO y entonces $\widehat{MLB}$ es el rectilíneo correspondiente al diedro $\hat{C}$, es decir, que es el ángulo de máxima pendiente entre los planos AOC y COB, por lo que

$$\left.\begin{array}{lcl} \hat{C} & = & MLB > MCB = \widehat{ACB} \\ \text{De la misma manera } \hat{B} & > & \widehat{ABC} \\ \hat{A} & > & \widehat{CAB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{C} + \hat{B} + \hat{C} > 2 \text{ rectos}$$

En resumen, se puede poner:

$$2 \text{ rectos} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 6 \text{ rectos}$$

según se quería demostrar.

4. Propiedades de los polígonos esféricos. — Teorema 1.°: *Un lado de un polígono esférico convexo, es menor que la suma de los demás.*

En efecto, sea el polígono esférico convexo *ABCDE* (fig. 33-9). Trazando todos los ciclos diagonales posibles desde un vértice *A*, por ejemplo, se puede poner

$$\left.\begin{aligned} \widehat{AE} &< \widehat{ED} + \widehat{AD} \\ \widehat{AD} &< \widehat{DC} + \widehat{AC} \\ \widehat{AC} &< \widehat{BC} + \widehat{AB} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \widehat{AE} < \widehat{ED} + \widehat{DC} + \widehat{CB} + \widehat{BA}$$

como se quería demostrar.

Teorema 2.°: *En un polígono esférico convexo, la suma de sus lados es menor que cuatro rectos.*

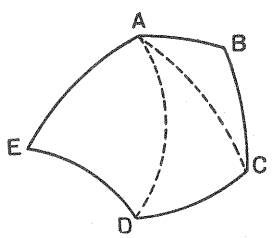


FIG. 33-9

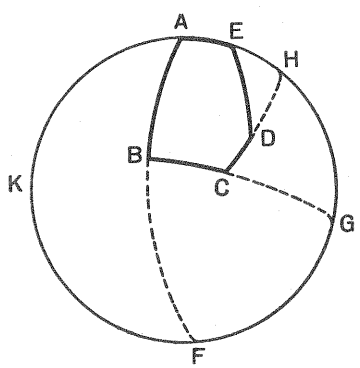


FIG. 33-10

En efecto, se puede escribir (fig. 33-10):

$$\left.\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BF} &= \widehat{AKF} \\ \widehat{BC} + \widehat{CG} &< \widehat{BF} + \widehat{FG} \\ \widehat{CD} + \widehat{DH} &< \widehat{CG} + \widehat{GH} \\ \widehat{DE} &< \widehat{DH} + \widehat{HE} \\ \widehat{EA} &= \widehat{EA} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando m. a m. } \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA} < AKFGHEA = 4 \text{ rectos}$$

que es lo que se deseaba demostrar.

Teorema 3.º: *La suma de los ángulos de un polígono convexo de* n *lados está comprendida entre* $2(n-2)$ *rectos y* $6(n-2)$ *rectos.*

En efecto, trazadas las diagonales esféricas posibles desde un vértice (figura 33-9), queda descompuesto en tantos triángulos esféricos como lados tiene menos dos, y como los ángulos de cada uno están comprendidos entre 2 y 6 rectos y además la suma de los ángulos de los triángulos es la suma de los ángulos del polígono, resulta

$$2(n-2) \text{ rectos} < \Sigma \text{ áng.} < 6(n-2) \text{ rectos}$$

5. Polígonos esféricos regulares. — *Un polígono esférico será regular cuando tenga todos sus lados y ángulos iguales.*

Teorema: *A todo polígono esférico regular, se le puede circunscribir una circunferencia.*

En efecto, tracemos los ciclos mediatrices $\overset{\frown}{MP}$ y $\overset{\frown}{PL}$ (fig. 33-11), de los lados $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$. Los planos correspondientes a los ciclos $\overset{\frown}{MP}$ y $\overset{\frown}{PL}$ serán también planos mediatrices de las cuerdas AB y BC. Puesto que $\hat{B} < 180°$ los planos mediatrices se han de cortar y precisamente en un diámetro, cuyo extremo es P, pues son planos diametrales.

Por consiguiente las cuerdas $PA = PB = PC$, pues P es un punto que pertenece a ambas mediatrices.

Si al conjunto se le hace girar alrededor del diámetro que pasa por P, de modo que A se superponga con B, lo cual puede ser, pues $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB}$, entonces, por la misma razón, B irá a parar a C, y el lado $\overset{\frown}{BC}$ seguirá la dirección de $\overset{\frown}{CD}$, por la igualdad de los ángulos $\hat{B} = \hat{C}$, por consiguiente C irá a parar sobre D. Y de la misma manera cada vértice se superpone con el siguiente, lo que equivale a escribir que

$$PA = PB = PC = PD = PE = \ldots$$

Si tomamos un radio igual a PA y hacemos centro en P y trazamos una curva, pasará por todos los vértices.

Ahora bien, esa curva es una circunferencia, puesto que el plano que pasa por ABC ha de contener los pies de todas esas oblicuas iguales, que además están en la superficie esférica.

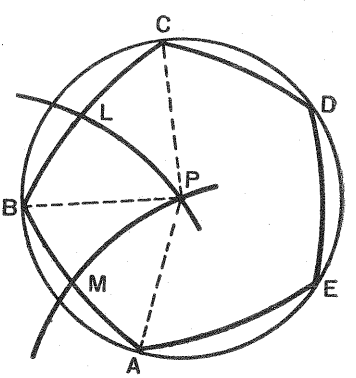


FIG. 33-11

Recíprocamente: *Si trazamos una circunferencia en una superficie esférica y la dividimos en* n *partes iguales y por cada dos puntos consecutivos hacemos pasar un ciclo, se obtiene un polígono esférico regular de* n *lados.*

En efecto, coincidirá con otro polígono regular de n lados iguales a los construidos y al que por consiguiente se le podrá circunscribir una circunferencia que resultaría coincidente con la dada, pues coinciden las cuerdas.

Teorema 2.º: *A un polígono regular esférico se le puede inscribir una circunferencia.*

Se demuestra de igual manera que el teorema anterior, con sólo trazar los ciclos bisectrices de los ángulos.

6. Distancia esférica mínima entre dos puntos de la superficie esférica. — La mínima distancia entre dos puntos de la superficie esférica viene dada por el arco de circunferencia máxima que pasa por ellos y es menor que dos rectos.

En efecto, sean (fig. 33-12), los puntos A y B en la superficie de la esfera. Demostremos que AB, arco de círculo máximo, es menor que otra curva cualquiera $ACDB$.

Dividamos esta curva en n partes iguales, mediante los puntos C, D, ... y por cada dos consecutivos, tracemos sendos arcos de círculo máximo, entonces se nos forma un polígono esférico $ACDB$, en el que un lado

$$\widehat{AB} < \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} \qquad [23\text{-a}]$$

Dupliquemos indefinidamente el número de puntos tomados en la curva y en cada caso se seguirá satisfaciendo la relación [23-a]; en el límite, el segundo miembro se transformará en la curva, con lo que vemos demostrado el teorema.

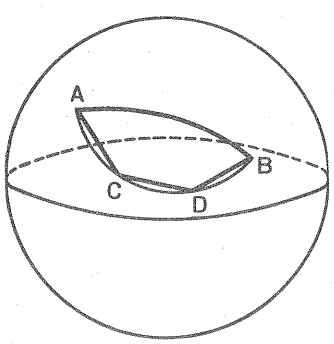


FIG. 33-12

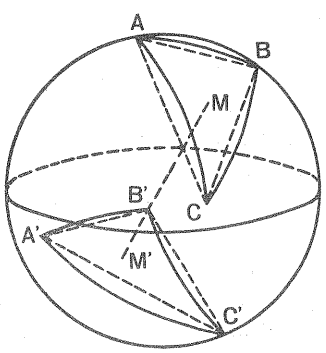


FIG. 33-13

7. Igualdad de triángulos esféricos. — 1.º *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen sus tres lados iguales e igualmente dispuestos, y pertenecen a la misma esfera o a esferas iguales* (fig. 33-13).

Tracemos las cuerdas de sus lados y obtendremos los triángulos rectilíneos ABC y $A'B'C'$, que son iguales por tener sus tres lados iguales. Por consiguiente se les puede hacer coincidir. Coincidirán sus circuncentros M y M' y por consi-

guiente las normales a sus planos por M y M' y también los centros de las esferas, pues de lo contrario no serían iguales los radios que tienen sus extremos en los vértices.

2.° *Dos triángulos esféricos son iguales si pertenecen a la misma esfera o a esferas iguales y tienen sus ángulos iguales e igualmente dispuestos.*

En efecto, sean los triángulos ABC y $A'B'C'$, que tienen (fig. 33-14)

$$\hat{A} = \hat{A}', \qquad \hat{B} = \hat{B}', \qquad \hat{C} = \hat{C}'$$

Supongamos colocados en dos esferas iguales, unamos los respectivos centros O y O' con los vértices, y así formaremos dos triedros. Por los mismos centros tracemos radios perpendiculares a las caras de los triedros, por ejemplo OA_1, de modo que A_1 y A estén en el mismo semiespacio respecto al plano BOC, y así para las demás perpendiculares. Unamos los extremos de los radios y se han formado otros triángulos $A_1B_1C_1$ y $A'_1B'_1C'_1$ que tienen los lados del uno respectivamente iguales a los del otro.

$\widehat{B_1OC_1}$ tiene los lados perpendiculares a las caras del diedro de arista A, por consiguiente son suplementarios, es decir, que

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \hat{A} + \hat{a}_1 \\ \text{por lo mismo} \quad \pi &= \hat{A}' + \hat{a}'_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \hat{a}_1 = \hat{a}'_1 \quad \text{pues} \quad \hat{A} = \hat{A}'$$

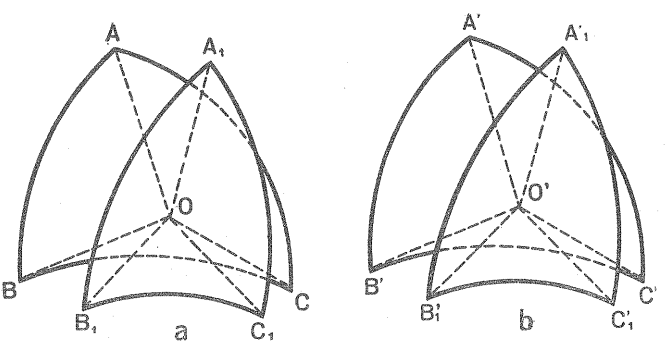


FIG. 33-14

Haciendo las mismas consideraciones deducimos que $b_1 = b'_1$ y $c_1 = c'_1$

Es decir, que $A_1B_1C_1$ tiene los lados respectivamente iguales a los lados de $A'_1B'_1C'_1$; por consiguiente esos triángulos pueden coincidir, pues son iguales. Al coincidir estos triángulos, coincidirán los respectivos triedros y por lo mismo los planos perpendiculares a las aristas, que son, los planos $A'B'C'$ con ABC, $B'C'O'$ con BCO y $A'C'O'$ con ACO. Pero al coincidir estos planos han de coincidir sus intersecciones con la esfera, es decir, los triángulos.

3.° *Dos triángulos son iguales si tienen un lado de uno igual a un lado de otro e iguales los ángulos adyacentes y todo igualmente dispuesto, suponiendo además que pertenecen a la misma esfera o a esferas iguales.*

Se demuestra por superposición de los lados iguales, lo que lleva consigo la coincidencia de los otros dos lados, al ser iguales los respectivos ángulos que forman.

4.° *Dos triángulos pertenecientes a la misma esfera o a esferas iguales, serán iguales si el primero de ellos tiene un ángulo igual a otro ángulo del segundo, y los lados que forman el primero son iguales a los que forman el segundo ángulo y todos igualmente dispuestos.*

Se demuestra de idéntica forma que el anterior.

34. Triángulos polares. Exceso esférico

1. Los triángulos esféricos simétricos respecto al centro son equivalentes. — En efecto, dos triángulos esféricos isósceles y simétricos son equivalentes, pues se les puede superponer. Sean los triedros $Vabc$ y $Va'b'c'$ (fig. 31-1), que tienen $\hat{a} = \hat{c}$ y por consiguiente

$$\hat{a}' = \hat{c}' = \hat{a} = \hat{c}$$

Tracemos la bisectriz r del ángulo $c'Va$ y giremos la figura alrededor de r, de modo que $c'a'$ coincidan con ac, entonces por las igualdades $\hat{c}' = \hat{a}$ y $\hat{a}' = \hat{c}$, necesariamente $c'b'$ se superpone sobre ab y $a'b'$ sobre bc, con lo que quedan coincidiendo los dos triedros.

Esto supone que dos triángulos esféricos que sean isósceles y simétricos respecto al centro, son superponibles y por tanto equivalentes.

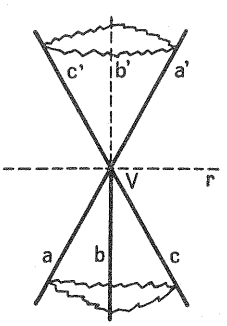


FIG. 34-1

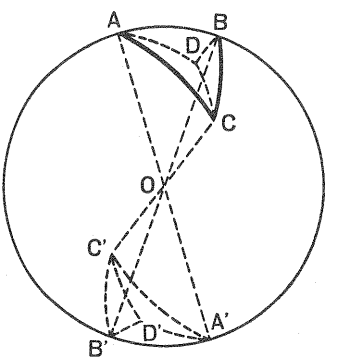


FIG. 34-2

Veamos que esta propiedad la tienen todos los triángulos simétricos respecto del centro, aunque no sean isósceles (fig. 34-2).

En efecto, sea el triángulo ABC, los tres vértices determinan un plano que corta a la esfera en una circunferencia que será circunscrita al triángulo esférico. Todo punto del diámetro normal al citado plano equidista de los tres vértices del triángulo y por consiguiente también equidista el punto D, extremo del citado diámetro.

Tracemos los radios esféricos y será $DA = DB = DC$, por lo que habrá quedado descompuesto el triángulo dado en tres triángulos isósceles. Los simétricos de éstos serán también isósceles y compondrán el triángulo $A'B'C'$.

Ahora bien,

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{DAB} = \overset{\triangle}{D'A'B'} \\ \overset{\triangle}{DBC} = \overset{\triangle}{D'B'C'} \\ \overset{\triangle}{DAC} = \overset{\triangle}{D'A'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

2. Triángulos esféricos polares. — Sea el triángulo esférico ABC, en el que los lados, por ser circunferencias de la esfera, tienen dos polos cada uno (fig. 34-3). Si consideramos el polo A' de $\overset{\frown}{BC}$, colocado en el mismo hemisferio que A y los polos B' y C' respectivamente de $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{AB}$, también colocados en los respectivos hemisferios de B y C, y unimos esos puntos con arcos máximos menores que 180°, formamos un triángulo que denominaremos *polar* de ABC.

Es evidente que con los otros tres polos se puede formar otro triángulo simétrico del anterior y que algunos consideran también como polar del dado. Aquí lo designaremos como triángulo opuesto al polar de ABC.

Observemos que a cada uno de los triángulos ABC y $A'B'C'$ le corresponde un triedro, $OABC$ al primero y $OA'B'C'$ al segundo. Estos triedros se denominan *polares* o *suplementarios*.

Si A' es el polo de $\overset{\frown}{BC}$, resulta que OA' es perpendicular al plano determinado por $\overset{\frown}{BC}$, y por lo mismo será OB' perpendicular al plano de $\overset{\frown}{AC}$ y OC' perpendicular al plano de $\overset{\frown}{AB}$.

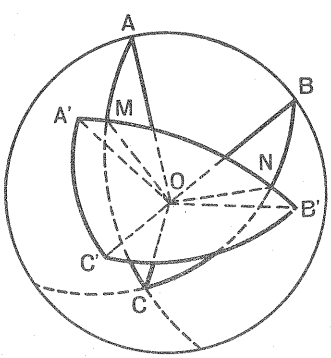


FIG. 34-3

Por consiguiente, un triedro (poliedro) OA'B'C' *es polar o suplementario de otro triedro (poliedro)* OABC, *si las aristas del primero son perpendiculares a las caras del segundo, de modo que cada arista de aquél quede respecto a la cara a que es perpendicular en el mismo semiespacio que contiene la respectiva arista del segundo.*

Propiedades de los triángulos polares.

Puesto que $OA' \perp$ al plano $\overset{\frown}{BC} \Longrightarrow OA' \perp OB$ y OC
$OB' \perp$ al plano $\overset{\frown}{AC} \Longrightarrow OB' \perp OA$ y OC $\Longrightarrow OC \perp OA'$ y OB'

Por consiguiente

$$OC \perp \text{al plano } \overset{\frown}{A'B'}$$

De la misma manera se deducirá que

$$OA \perp \text{al plano } \widehat{B'C'} \qquad \text{y} \qquad OB \perp \text{al plano } \widehat{A'C'}$$

Esto nos autoriza a afirmar que *si un triángulo* A'B'C' *es polar de otro* ABC, *éste es polar de aquél.*

3. *En dos triángulos polares, las caras del uno son suplemento de los ángulos del otro y al contrario.*

En efecto (fig. 34-3)

$$\left.\begin{array}{l} OA' \perp \text{a la cara } \widehat{BC} \Longrightarrow OA' \perp OC \\ OB' \perp \text{a la cara } \widehat{BC} \Longrightarrow OB' \perp OC \end{array}\right\} \Longrightarrow OC \perp \text{a la cara } \widehat{A'B'}$$

Es decir, que la cara $\widehat{A'B'}$ corta al diedro $\widehat{OC}$ según un ángulo rectilíneo $\widehat{MON}$ correspondiente al diedro.

Por consiguiente, OA', OM, ON y OB' están en el mismo plano.

Además

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\wedge}{A'ON} = \overset{\wedge}{A'OM} + \overset{\wedge}{MON} = 90^\circ \\ \overset{\wedge}{MOB'} = \overset{\wedge}{MON} + \overset{\wedge}{NOB'} = 90^\circ \end{array}\right\} \quad (\overset{\wedge}{A'OM} + \overset{\wedge}{MON} + \overset{\wedge}{NOB'}) + \overset{\wedge}{MON} = 180^\circ \Longrightarrow$$

$$\overset{\wedge}{A'OB'} + \overset{\wedge}{MON} = 180^\circ \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \overset{\wedge}{c'} + \hat{C} = 180^\circ \\ \overset{\wedge}{a'} + \hat{A} = 180^\circ \\ \overset{\wedge}{b'} + \hat{B} = 180^\circ \end{array}$$

Es decir, que los lados de $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son suplemento de los ángulos de $\overset{\triangle}{ABC}$.

Pero resulta que éste es polar de aquél, luego podemos poner que

$$\hat{a} + \overset{\wedge}{A'} = 180^\circ, \qquad \hat{b} + \overset{\wedge}{B'} = 180^\circ \quad \text{y} \quad \hat{c} + \overset{\wedge}{C'} = 180^\circ$$

que es lo que deseábamos demostrar.

4. Huso esférico: su área. Clases de triángulos. — Denominamos huso esférico a la parte de superficie esférica, comprendida entre dos círculos máximos. Así, la superficie $PABP'$ es un huso esférico (fig. 34-4).

Calculemos su área en función del ángulo diedro que lo define. Es evidente que existe proporcionalidad entre el diedro cuyo rectilíneo es AOB y la superficie del huso, por lo que tomando la medida del diedro, bien en grados n^0 o bien en radianes n, se tendrán las siguientes expresiones del área

$$Sh = \frac{4\pi R^2 n^0}{360} = \frac{\pi R^2 n^0}{90^\circ} \qquad \text{o bien} \qquad Sh = \frac{4\pi r^2 n}{2\pi} = 2r^2 n \qquad [34\text{-a}]$$

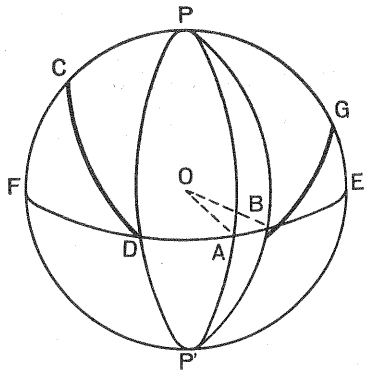


FIG. 34-4

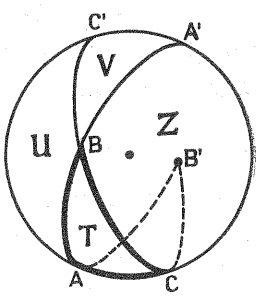


FIG. 34-5

Los triángulos esféricos pueden ser (fig. 34-4):

1.° *Equiláteros, isósceles* y *escalenos,* según tengan los tres, dos o ningún lado igual. Así es equilátero *FPD,* isósceles *APB* y escaleno *DCP.*

2.° *Rectángulos, birrectángulos* y *trirrectángulos,* según tengan uno, dos o tres ángulos rectos. Ejemplos: *DFC, APB* y *FPD,* respectivamente.

3.° *Acutángulos* y *obtusángulos,* según tengan los tres ángulos agudos o uno obtuso.

4.° *Rectiláteros, birrectiláteros* y *trirrectiláteros,* según tengan uno, dos o tres lados de 90°. Así, *DCP, APB* y *FPD,* lo son respectivamente.

5. Exceso esférico. Área del triángulo esférico. — Sabemos que los ángulos del triángulo esférico tienen una suma mayor que dos rectos, es decir, que si el triángulo es *ABC,* se puede poner

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2 \text{ rectos} \quad \text{o bien} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$$

pues bien, la diferencia $2E$, de modo que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180° = 2E \quad \text{o bien} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 2E$$

se denomina *exceso esférico.*

Calculemos el área del triángulo *ABC* (fig. 34-5), en función de su exceso esférico. Para ello dibújese el triángulo opuesto por el vértice $\overset{\triangle}{BC'A'}$ y el simétrico de éste respecto al centro de la esfera, que según (21-1), han de ser iguales. Se puede poner si expresamos por H_a, H_b y H_c, las áreas de los husos esféricos correspondientes respectivamente a los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Área de } T + \text{Área de } U = H_c \\ \text{Área de } T + \text{Área de } V = H_b \\ \text{Área de } T + \text{Área de } Z = H_a\end{array}\right\} \Longrightarrow 2T + T + U + V + Z = H_c + H_a + H_b.$$

O lo que es lo mismo, llamando S a la superficie de la esfera

$$2T + \frac{S}{2} = H_c + H_a + H_b \qquad [34\text{-b}]$$

Pero la superficie de la esfera se le puede considerar como un huso esférico de 360°, por lo que teniendo en cuenta [34-b], se tiene

$$2T = \frac{\pi R^2}{90} A + \frac{\pi R^2}{90} B + \frac{\pi R^2}{90} C - \frac{\pi R^2}{90} 180° =$$

$$= \frac{\pi R^2}{90} (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180°) = \frac{\pi R^2}{90} 2E$$

o bien en radianes

$$2T = 2R^2A + 2R^2B + 2R^2C - 2R^2\pi = 2R^2 \cdot (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) = 2R^2 2E$$

Luego

$$\text{Área de } \overset{\triangle}{ABC} = T = \frac{\pi R^2}{90} E \quad \text{o bien} \quad T = 2R^2E$$

6. Otras propiedades de los triángulos esféricos. — 1.ª Un ángulo exterior a un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos no adyacentes.

En efecto (fig. 34-6),

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180° \\ \hat{a} + \hat{B} \quad = 180° \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A} + \hat{C} - \hat{a} > 0 \Longrightarrow \hat{A} + \hat{C} > \hat{a}$$

como se quería demostrar.

2.ª Las medianas esféricas de un triángulo esférico se cortan en un mismo punto.

En efecto, sea $\overset{\frown}{DC}$ la mediana respecto al lado $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 34-6). Por ser D el punto medio de AB, el radio OD corta a la cuerda en el punto medio M. Esto quiere decir que el plano de la mediana DC contiene a la mediana CM del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, formado por las cuerdas. Y como lo mismo se puede decir de las otras medianas, podemos afirmar que los planos de dichas medianas esféricas se cortan en un mismo radio, lo cual equivale a que las medianas esféricas se cortan en un punto.

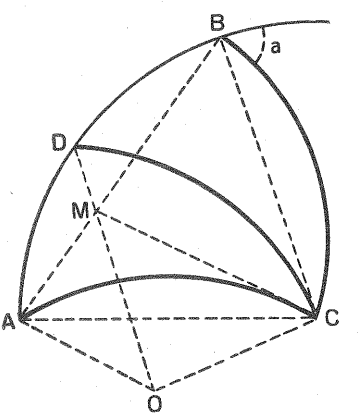


FIG. 34-6

35. Trigonometría esférica. Grupo Bessel

1. Trigonometría esférica. — Tiene por objeto resolver los triángulos esféricos, lo cual supone relacionar los elementos que los forman por medio de fórmulas adecuadas.

En realidad, un triángulo esférico, se le puede considerar como la intersección de una esfera con un triedro que tenga su vértice en el centro de la esfera; entonces, las caras del triedro originarán, al cortar la superficie esférica, arcos de círculo máximo, que son los lados del triángulo, y sus ángulos no son más que los mismos diedros del triedro.

Puesto que un triedro queda determinado por 3 de sus seis elementos, así un triángulo esférico podrá construirse, o bien resolverse, conociendo tres de sus seis elementos, lo cual da origen a los siguientes casos:

Un triángulo esférico queda determinado, si se conocen:

1.° Los tres lados.
2.° Dos lados y el ángulo comprendido.
3.° Dos lados y un ángulo opuesto.
4.° Un lado y los dos ángulos adyacentes.
5.° Dos ángulos y un lado opuesto.
6.° Los tres ángulos.

En adelante designaremos por A, B y C los ángulos del triángulo y por a, b y c los lados, opuestos respectivamente a cada ángulo de igual letra.

2. Grupo Bessel: Preliminares. — Sea el triángulo ABC en el que se han trazado los vértices α, β y γ de su polar. Consideremos el radio de la esfera igual a la unidad y los radios correspondientes a los vértices de los triángulos, como vectores dirigidos desde el centro a la superficie.

Estos vectores se designarán, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ y $\vec{\gamma}$, todos ellos unitarios por ser radios.

Los ángulos se contarán como positivos en la dirección de la flecha.

Desde C y B, bajemos BN y CM, perpendiculares a OA. Se tiene, evidentemente:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB}$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} \qquad [35\text{-a}]$$

Multiplicando vectorialmente m. a m. y teniendo en cuenta la propiedad distributiva del producto vectorial, se tiene:

$$[\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}] = [\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NB}] \cdot [\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}] =$$

$$= [\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}] + [\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MC}] +$$

$$+ [\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{OM}] + [\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MC}] \quad [35\text{-b}]$$

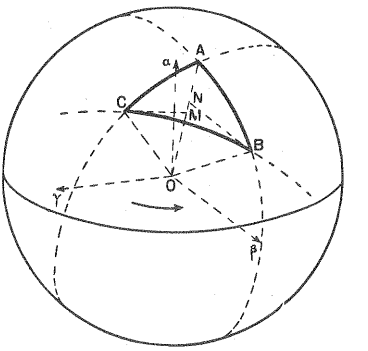


FIG. 35-1

pero teniendo en cuenta que,

$[\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}] = OB \cdot OC \text{ sen } a\,(-\vec{\alpha}) = -\text{sen } a \cdot \vec{\alpha}$, ya que $\vec{\alpha}$ es un vector perpendicular a COB. (Téngase en cuenta la regla de avance del sacacorchos para el signo de $\vec{\alpha}$).

$$[\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}] = ON \cdot OM \text{ sen } 0° = 0$$

$$[\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MC}] = ON \cdot MC \text{ sen } 90° \vec{\beta} = \cos c \text{ sen } b \cdot \vec{\beta}$$

$$[\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{OM}] = NB \cdot OM \text{ sen } 90° \vec{\gamma} = \text{sen } c \cos b \cdot \vec{\gamma}$$

$$[\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MC}] = NB \cdot MC \text{ sen } A\,(-\overrightarrow{OA}) = -\text{sen } c \text{ sen } b \text{ sen } A \cdot \overrightarrow{OA}$$

Reemplazando en [35-b], nos queda:

$$-\text{sen } a \cdot \vec{\alpha} = \cos c \text{ sen } b \cdot \vec{\beta} + \text{ sen } c \cos b \cdot \vec{\gamma} - \text{sen } c \text{ sen } b \text{ sen } A \cdot \overrightarrow{OA} \quad [35\text{-c}]$$

Relación de la que nos vamos a servir para deducir los dos grupos Bessel.

3. Ley del seno. — Multipliquemos vectorialmente los dos miembros de [35-c] por $\vec{\alpha}$ y teniendo en cuenta que,

$[\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}] = 1 \cdot 1 \text{ sen } 0° = 0$

$[\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}] = 1 \cdot 1 \text{ sen } (\beta, \alpha)\,\overrightarrow{OC} = \text{sen } C \cdot \overrightarrow{OC}$, pues el vector perpendicular a (β, α), es $\overrightarrow{OC}$, y tiene signo positivo porque el sacacorchos, al girar de $\vec{\beta}$ a $\vec{\alpha}$ avanza según $\overrightarrow{OC}$

$[\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}] = 1 \cdot 1 \text{ sen } (\gamma, \alpha)\,\overrightarrow{OB} = -\text{sen } B \cdot \overrightarrow{OB}$, pues al girar el sacacorchos desde $\vec{\gamma}$ a $\vec{\alpha}$ avanza en dirección contraria a $\overrightarrow{OB}$

Resultará, pues,

$$0 = \cos c \text{ sen } b \text{ sen } C \cdot \overrightarrow{OC} - \text{sen } c \cos b \text{ sen } B \cdot \overrightarrow{OB} - \text{sen } b \text{ sen } c \text{ sen } A\,[\overrightarrow{OA} \cdot \alpha]$$

Multipliquemos escalarmente ambos miembros de esta igualdad por $\overrightarrow{OA}$ y tengamos en cuenta:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = OC \cdot OA \cos b = \cos b; \qquad \text{pues, } OC \cdot OA = 1$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \cdot OA \cos c = \cos c$$

y $$[\overrightarrow{OA} \cdot \vec{\alpha}]\overrightarrow{OA} = 0,$$

pues estos últimos son vectores perpendiculares. Queda, después de reemplazar,

$$0 = \cos c \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \cos b - \operatorname{sen} c \cos b \operatorname{en} B \cos c$$

o bien, simplificando:

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c \quad \text{o} \quad \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

y operando igualmente con $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OA}$ se obtendría la siguiente fórmula expresión de la ley del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \qquad [35\text{-d}]$$

4. Ley del coseno. — Multiplicando escalarmente las dos igualdades de [35-a] m. a m. resulta, teniendo en cuenta la propiedad distributiva del producto escalar,

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB})(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) =$$

$$= \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

Considerando que:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \cdot OC \cos a = \cos a, \qquad \text{pues, } OB \cdot OC = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MC} = ON \cdot MC \cos 90° = 0,$$

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = ON \cdot OM \cos 0° = \cos b \cos c$$

$$\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{OM} = NB \cdot OM \cos 90° = 0$$

$$\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MC} = NB \cdot MC \cos A = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos A.$$

Nos queda,

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos A,$$

que es una de las fórmulas del Grupo Bessel, que presenta las tres formas siguientes:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C \end{aligned} \qquad [35\text{-e}]$$

5. Tercera fórmula del Grupo Bessel. — Multipliquemos escalarmente ambos miembros de [35-c] por $\vec{\gamma}$ y tengamos en cuenta que los ángulos del triángulo son suplementarios con los lados del polar.

Puesto que

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 1 \cdot \cos(\pi - B) = -\cos B, \qquad \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \cos(\pi - A) = -\cos A$$
$$\vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} = \cos 0° = 1 \qquad \overrightarrow{OA} \cdot \vec{\gamma} = OA \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0.$$

Queda:

$$\operatorname{sen} a \cos B = -\cos c \operatorname{sen} b \cos A + \operatorname{sen} c \cos b$$

que constituye la tercera fórmula, que podemos escribir de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b - \cos c \operatorname{sen} b \cos A \\
&\operatorname{sen} a \cos C = \operatorname{sen} b \cos c - \cos b \operatorname{sen} c \cos A \\
&\operatorname{sen} b \cos A = \operatorname{sen} c \cos a - \cos c \operatorname{sen} a \cos B \\
&\operatorname{sen} b \cos C = \operatorname{sen} a \cos c - \cos a \operatorname{sen} c \cos B \\
&\operatorname{sen} c \cos B = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \cos C \\
&\operatorname{sen} c \cos A = \operatorname{sen} b \cos a - \cos b \operatorname{sen} a \cos C
\end{aligned} \qquad [35\text{-f}]$$

6. Fórmulas fundamentales. — Apliquemos [35-e] al triángulo polar y resulta:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A',$$

en la que hacemos las siguientes sustituciones:

$$a' = \pi - A, \quad b' = \pi - B, \quad c' = \pi - C, \quad \text{y} \quad A' = \pi - a,$$

quedando después de cambiar de signo,

$$\begin{aligned}
&\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \\
&\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b \\
&\cos C = -\cos B \cos A + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A \cos c
\end{aligned} \qquad [35\text{-g}]$$

Si hacemos lo mismo en [35-f], se tiene:

$$-\operatorname{sen} A \cos b = -\operatorname{sen} C \cos B - \cos C \operatorname{sen} B \cos a$$

que da origen a otras seis fórmulas encabezadas por

$$\operatorname{sen} A \cos b = \operatorname{sen} C \cos B + \cos C \operatorname{sen} B \cos a \qquad [35\text{-h}]$$

Este grupo, junto con los tres anteriormente hallados, [35-d], [35-e] y [35-f], constituyen las fórmulas fundamentales de la Trigonometría esférica, que permiten resolver todos los casos de los triángulos esféricos.

7. Grupos Bessel. — El grupo formado por [35-d] y una fórmula de [35-e] con otra de [35-f] constituyen el llamado primer grupo Bessel

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \qquad [35\text{-i}]$$
$$\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b - \cos c \operatorname{sen} b \cos A$$

y ésta aplicada al triángulo polar origina

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$
$$\operatorname{sen} A \cos b = \operatorname{sen} C \cos B + \cos C \operatorname{sen} B \cos a$$

llamado segundo grupo Bessel.

8. Analogía de Neper. — Es muy interesante el transformar algunas de las fórmulas que constituyen los grupos Bessel, con el fin de facilitar su empleo inmediato al cálculo. Una de las más empleadas es el grupo de fórmulas conocidas con el nombre de Analogías de Neper, que serán las únicas que presentaremos aquí.

La [34-e] se puede poner

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$1 - \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$1 + \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b+c}{2} \operatorname{sen} \dfrac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

De aquí se deduce

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \dfrac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{a+b+c}{2} \operatorname{sen} \dfrac{b+c-a}{2}}}$$

e igualmente

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}}}$$

y

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}}}$$

Pero sabemos que

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}$$

En las que reemplazando los valores anteriores en cada una, se tiene

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}}}\left[\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}}}+\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}}}\right]}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}-\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}+\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}}}\;\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}}{2\cos\dfrac{a+b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\;\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}$$

De igual manera se calcularían las tres restantes fórmulas, que damos a continuación y que forman las citadas Analogías de Neper.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}}\qquad [35\text{-j}]$$

Aplicando éstas al triángulo polar, se obtiene

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}\qquad [35\text{-k}]$$

36. Triángulos rectángulos y rectiláteros

1. Fórmulas correspondientes a triángulos esféricos rectángulos. — Sea el triángulo rectángulo ABC, en el que suponemos que $A = 90°$. Llevando este valor a las dos primeras fórmulas de [35-i] y a la primera de [35-g], se obtiene sencillamente

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \cos a &= \cos b \cos c \\ \cos a &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \end{aligned}$$

Además, la última de [35-f] escrita así:

$$\operatorname{sen} c \cos A = \operatorname{sen} b \cos a - \cos b \operatorname{sen} a \cos C,$$

se transforma en

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

al hacer $A = 90°$.

Por otra parte, de la primera de [35-f], haciendo $A = 90°$, sale

$$\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b,$$

por la que dividimos m. a m.

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b,$$

antes hallada, con lo que se obtiene:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B$$

Y finalmente, la segunda de [35-g] escrita

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

se transforma, al poner $A = 90°$, en

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b$$

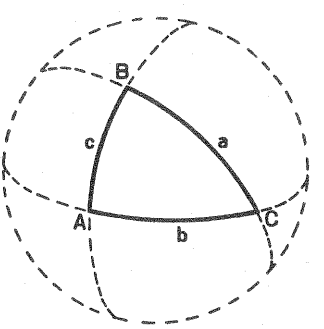


FIG. 36-1

En resumen, las fórmulas que resuelven todos los casos de triángulos rectángulos son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B & \qquad \operatorname{tg} b &= \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \\ \cos a &= \cos b \cos c & \qquad \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} a \cos C \\ \cos a &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C & \qquad \cos B &= \operatorname{sen} C \cos b \end{aligned} \qquad [36\text{-a}]$$

2. Fórmulas correspondientes a triángulos rectiláteros. — Si las fórmulas anteriores se aplican al triángulo polar del dado, que será rectilátero, teniendo en cuenta las relaciones entre los elementos de los dos triángulos,

$$b = \pi - B', \quad a = \pi - A' \quad \text{y} \quad B = \pi - b'$$

la primera se transforma en

$$\operatorname{sen} B' = \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} b'$$

y por lo tanto obtenemos

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b & \operatorname{tg} B = \operatorname{sen} C \operatorname{tg} b \\ \cos A = -\cos B \cos C & \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cos c \\ \cos A = -\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c & \cos b = \operatorname{sen} c \cos B \end{array} \qquad [36\text{-b}]$$

seis relaciones que sirven para resolver los casos de triángulos rectiláteros.

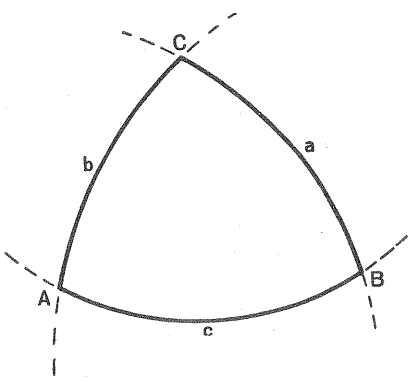


FIG. 36-2

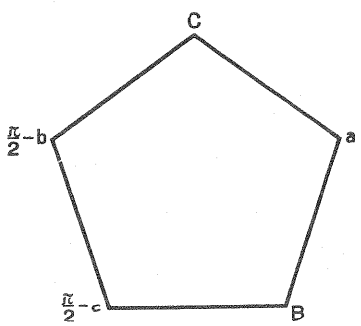


FIG. 36-3

3. Regla mnemotécnica. — Los autores proponen unos artificios para recordar con facilidad las fórmulas [36-a], uno de los más útiles es el que se conoce con el nombre de Pentágono de Neper, y es atribuido a este autor aún cuando lo enunció de forma algo diferente.

En los vértices de un pentágono se colocan los elementos del triángulo, en el mismo orden que figuran en él, prescindiendo del ángulo recto A y colocando en lugar de los catetos b y c, sus complementos $\frac{\pi}{2} - b$ y $\frac{\pi}{2} - c$. Entonces: *El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes y también es igual al producto de los senos de los elementos opuestos.*

Las fórmulas de los triángulos rectiláteros se obtienen de igual manera aplicando la regla al triángulo polar del dado, que será rectángulo, y colocando en los vértices del pentágono en lugar de los lados o ángulos de éste, los suplementos de los ángulos o lados de aquél.

4. Resolución de triángulos rectángulos y rectiláteros. — Distinguiremos los casos siguientes:

PRIMER CASO. *Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo la hipotenusa y un cateto.* Datos: $A = 90°$, a y b. Incógnitas: c, B y C.

GRUPOS	FÓRMULAS		
$a,\ b,\ c$	$\cos a = \cos b \cos c$		$\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b}$
$a,\ b,\ B$	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$	Sale	$\operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$
$a,\ b,\ C$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$		$\cos C = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$

EJEMPLO: Resolver el triángulo esférico rectángulo que tiene:

$$\left.\begin{matrix} b = 15° \\ a = 152°\ 20' \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \log \cos (\pi - 152°\ 20') = \bar{1}'947269 \\ \operatorname{colog} \cos 15° \quad\quad\quad = 0'015056 \\ \hline \log \cos (\pi - c) \quad\quad = \bar{1}'962325 \end{matrix} \qquad c = 156°\ 28'\ 40''$$

$$\begin{matrix} \log \operatorname{sen} 15° \quad\quad = \bar{1}'412996 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 152°\ 20' = 0'333176 \\ \hline \log \operatorname{sen} B \quad\quad = \bar{1}'746172 \end{matrix} \qquad B = 33°\ 52'\ 35''$$

$$\begin{matrix} \log \operatorname{tg} 15° \quad\quad = \bar{1}'428052 \\ \operatorname{colog} \operatorname{tg} (\pi - 152°\ 20') = 0'280445 \\ \hline \log \operatorname{tg} (\pi - C) \quad\quad = \bar{1}'708497 \end{matrix} \qquad C = 120°\ 44'\ 11''$$

Hemos buscado en las tablas el coseno del suplemento del ángulo de 152° 20′ y por consiguiente, se toma el suplemento c, del ángulo encontrado. Lo mismo se hace en colog tg $(\pi - 152°\ 20')$ y log cos $(\pi - C)$.

SOLUCIÓN:

$$c = 156°\ 30'\ 26'', \qquad B = 33°\ 52'\ 35'', \qquad C = 120°\ 44'\ 11''$$

SEGUNDO CASO. Datos: *Catetos* b y c. Incógnitas: a, B, C.

GRUPOS	FÓRMULAS	
$b,\ c,\ a$	$\cos a = \cos b \cos c$	
$b,\ c,\ B$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B$	$\operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}$
$b,\ c,\ C$	$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C$	$\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}$

EJEMPLO: $b = 32° \ 41'$, $c = 25° \ 18'$

$$\begin{array}{l} \log \cos 25° \ 18' = \bar{1}'956208 \\ \log \cos 32° \ 41' = \bar{1}'925141 \\ \hline \log \cos a \quad = \bar{1}'881349 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log \operatorname{tg} 32° \ 41' = \bar{1}'807249 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 25° \ 18' = 0'369208 \\ \hline \log \operatorname{tg} B \quad = 0'176457 \end{array}$$

$a = 40° \ 27' \ 11''$ $\qquad$ $B = 56° \ 19' \ 56''$

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{tg} 25° \ 18' = \bar{1}'674584 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 32° \ 41' = 0'267610 \\ \hline \log \operatorname{tg} C \quad = \bar{1}'942194 \end{array} \qquad C = 41° \ 11' \ 53''$$

SOLUCIÓN:

$a = 40° \ 27' \ 11''$, $\quad B = 56° \ 19' \ 56''$, $\quad C = 41° \ 11' \ 53''$

TERCER CASO. Datos: *Hipotenusa y un ángulo a, B.* Incógnitas: *b, c, C.*

GRUPOS	FÓRMULAS	
a, B, b	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$	
a, B, c	$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$	
a, B, C	$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C$	$\operatorname{cotg} C = \operatorname{tg} B \cos a$

EJEMPLO: $a = 54° \ 20'$ y $B = 57° \ 59' \ 19''$

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{sen} 57° \ 59' \ 19'' = \bar{1}'928366 \\ \log \operatorname{sen} 54° \ 20' \quad = \bar{1}'909782 \\ \hline \log \operatorname{sen} b \quad = \bar{1}'838148 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log \operatorname{tg} 54° \ 20' \quad = 0'144062 \\ \log \cos 57° \ 59' \ 19'' = \bar{1}'724348 \\ \hline \log \operatorname{tg} c \quad = \bar{1}'868410 \end{array}$$

$b = 43° \ 32' \ 31''$ $\qquad$ $c = 36° \ 27' \ 1''$

$$\begin{array}{l} \log \cos 57° \ 59' \ 19'' = 0'204019 \\ \log \cos 54° \ 20' \quad = \bar{1}'765720 \\ \hline \log \operatorname{cotg} C \quad = \bar{1}'969739 \end{array} \qquad C = 46° \ 59' \ 40''$$

SOLUCIÓN:

$b = 43° \ 32' \ 31''$, $\quad c = 36° \ 27' \ 1''$, $\quad C = 46° \ 59' \ 40''$

CUARTO CASO. Datos: *Un cateto y un ángulo adyacente, b y C.* Incógnitas: *a, c y B.*

GRUPOS	FÓRMULAS	
b, C, a	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$	$\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\cos C}$
b, C, c	$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C$	
b, C, B	$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$	

EJEMPLO: $b = 131° 8'$, $C = 161° 52'$.

$$\begin{array}{rl} \log \text{tg}\,(\pi - 131° 8') & = 0'058796 \\ \text{colog sen } 161° 52' & = 0'506919 \\ \hline \log \text{tg}\,(\pi - a) & = 0'565715 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \text{sen } 131° 8' & = \bar{1}'876899 \\ \log \text{tg}\,(\pi - 161° 52') & = \bar{1}'515204 \\ \hline \log \text{tg}\,(\pi - c) & = \bar{1}'392103 \end{array}$$

$a = 150° 12' 24''$ $\qquad$ $c = 168° 8' 38''$

$$\begin{array}{rl} \log \cos\,(\pi - 131° 8') & = \bar{1}'818103 \\ \log \text{ sen } 161° 52' & = \bar{1}'493080 \\ \hline \log \cos\,(\pi - B) & = 1'311183 \end{array} \qquad B = 101° 48' 50''$$

Al tomar en las tablas la tangente y coseno del suplemento de 131° 8' se ha de hacer lo mismo con los ángulos que nos dan las tablas para hallar *a*, *c* y *B*.

SOLUCIÓN:

$a = 150° 12' 24''$, $\qquad c = 166° 8' 38''$, $\qquad B = 101° 48' 50''$

QUINTO CASO. Datos: *Un cateto y el ángulo opuesto,* b *y* B. Incógnitas: *a, c* y *C.*

GRUPOS	FÓRMULAS	
b, B, a	$\text{sen } b = \text{sen } a \text{ sen } B$	$\text{sen } a = \dfrac{\text{sen } b}{\text{sen } B}$
b, B, c	$\text{tg } b = \text{sen } c \text{ tg } B$	$\text{sen } c = \dfrac{\text{tg } b}{\text{tg } B}$
b, B, C	$\cos B = \text{sen } C \cos b$	$\text{sen } C = \dfrac{\cos B}{\cos b}$

Este caso puede tener dos soluciones, correspondientes a los dos pares de valores que resultan para *a, c* y *C* por utilizar el seno, según se puede ver en la figura.

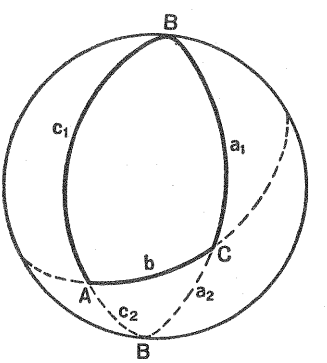


FIG. 36-4

EJEMPLO: $b = 35° 47'$ y $B = 53° 26'$

Apliquemos las fórmulas:

$$\begin{array}{rl} \log \text{ sen } 35° 47' & = \bar{1}'766949 \\ \text{colog sen } 53° 26' & = 0'095196 \\ \hline \log \text{ sen } a & = \bar{1}'862145 \end{array}$$

$a_1 = 46° 43' 15''$ $\qquad$ $a_2 = 133° 16' 45''$

$$\begin{array}{rl} \log \cos 53° 26' & = \bar{1}'775070 \\ \text{colog cos } 35° 47' & = 0'090854 \\ \hline \log \text{ sen } C & = \bar{1}'865924 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \text{tg } 35° 47' & = \bar{1}'857803 \\ \text{colog tg } 53° 26' & = \bar{1}'870265 \\ \hline \log \text{ sen } c & = \bar{1}'728068 \end{array}$$

$C_1 = 47° 15' 20''$, $\quad C_2 = 132° 44' 40''$ $\qquad$ $c_1 = 32° 19' 12''$, $\quad c_2 = 147° 40' 48''$

SOLUCIONES:

$a_2 = 46° 43' 15''$ $\quad c_2 = 33° 10' 6''$ $\quad C_2 = 47° 15' 20''$

$a_1 = 133° 16' 45''$ $\quad c_1 = 146° 49' 54''$ $\quad C_1 = 132° 44' 40''$

SEXTO CASO. Datos: *Dos ángulos oblicuos,* B *y* C. Incógnitas: *a, b* y *c.*

GRUPOS	FÓRMULAS	
B, C, a	$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C$	
B, C, b	$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$	$\cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$
B, C, c	$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B$	$\cos c = \dfrac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$

EJEMPLO: $B = 57° 59'$, $\quad C = 46° 59'$

Aplicando las fórmulas:

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{cotg} 57° 59' = \bar{1}'796070 \\ \log \operatorname{cotg} 46° 59' = \bar{1}'969909 \\ \hline \log \cos a \quad = \bar{1}'765979 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log \cos 57° 59' = \bar{1}'724412 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 46° 59' = 0'135990 \\ \hline \log \cos b \quad = \bar{1}'860402 \end{array}$$

$a = 54° 18' 32''$ $\qquad b = 46° 28' 40''$

$$\begin{array}{r} \log \cos 46° 59' = \bar{1}'833919 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 57° 59' = 0'071658 \\ \hline \log \cos c \quad = \bar{1}'905577 \end{array} \qquad c = 36° 25' 44''$$

SOLUCIÓN:

$a = 54° 18' 32''$, $\quad b = 46° 28' 40''$, $\quad c = 36° 25' 44''$

De una manera semejante se resuelven los casos de los triángulos rectiláteros, utilizando las fórmulas [36-b], pero en la práctica se suele resolver el triángulo polar correspondiente que coincide con uno de los casos anteriores y con los valores hallados se obtienen los elementos del triángulo buscado.

37. Aplicación de la trigonometría esférica a la esfera terrestre. Coordenadas geográficas

1. Forma de la Tierra. — Los innumerables viajes de circunvalación alrededor de la Tierra, junto con otras muchas pruebas geográficas y astronómicas, como la sombra de la Tierra sobre la Luna, la forma de la superficie del mar, y últimamente las fotografías obtenidas desde grandes alturas, por medio de cohetes y satélites artificiales, no dejan lugar a duda de que la Tierra es esférica.

Cuidadosas mediciones de arcos verificadas sobre todo durante el siglo XVIII, han conducido a poner en claro que no todos los círculos máximos son iguales, ni todos los radios de la misma longitud, pues la Tierra presenta un achatamiento en los polos, que le hace ser más bien que esfera un elipsoide, cuyo eje mayor, radio ecuatorial, mide 6.378 Km., mientras que el eje menor, radio polar, es de sólo 6.357 kilómetros.

Su superficie no es lisa más que en los mares, pues la parte sólida está cubierta de arrugas más o menos pronunciadas, que llamamos cordilleras.

De todas las maneras, los desniveles que forman estas arrugas, son en comparación con sus dimensiones, como los pequeños defectos que una naranja tiene en su piel, respecto de su tamaño. En efecto, el más alto monte, el Everest 8.889 m.), representa (8'889 : 6.378 = 0'00014) menos de las dos diezmilésimas de su radio.

Es más, la superficie de los mares, no sólo no se acomoda a la forma de la esfera, pero ni a la del elipsoide, que en una primera aproximación hemos admitido antes; su forma es más compleja y característica y se le designa con el nombre de *geoide.*

Nosotros, no obstante, en todo el estudio que vamos a hacer, consideraremos a la Tierra como esférica, cuyo radio medio es de 6.370 Km.

2. Meridianos, paralelos, coordenadas geográficas. — Considerada la Tierra esférica, existe en ella un diámetro, alrededor del cual gira, llamado *eje de la Tierra,* que por ahora consideraremos invariable. Los extremos de este eje son los *polos,* que reciben los nombres de *Norte* o boreal y *Sur* o austral.

Éstos son los puntos de partida para establecer en la superficie terrestre unas líneas, que permiten determinar la posición de los objetos en ella establecidos.

Las más importantes de estas líneas son las siguientes (fig. 37-1):

Meridianos, circunferencias máximas que pasan por los polos.

Ecuador, circunferencia máxima cuyo plano es perpendicular al eje terrestre.

Paralelos, son circunferencias menores, cuyos planos son paralelos al del Ecuador.

Se ha establecido un meridiano y el Ecuador como línea de referencia, siendo más comúnmente aceptado como meridiano de referencia, o *primer meridiano,* el que pasa por Greenwich, cerca de Londres.

Una vez definidos estos dos círculos máximos de referencia, ya se puede hablar de coordenadas geográficas, para fijar un punto de la superficie terrestre a la manera que las coordenadas cartesianas fijan un punto sobre el plano.

Estas coordenadas son dos: *longitud* y *latitud.*

Longitud de un punto de la superficie terrestre es el ángulo que el plano del meridiano que pasa por ese punto forma con el del primer meridiano.

Se mide sobre el Ecuador a partir del primer meridiano y puede ser *longitud Este,* hacia la derecha, desde 0° a 180°, y *longitud Oeste,* hacia la izquierda, también desde 0° a 180°.

Latitud de un punto de la superficie terrestre es la distancia en grados que media desde el Ecuador hasta el paralelo que pasa por el citado punto. Puede ser *latitud Norte,* a partir del Ecuador hacia el polo Norte y desde 0° a 90°, y *latitud Sur,* hacia el polo Sur, también desde 0° a 90°.

Así, decimos que Nueva York tiene 74° de longitud O. y 40° 43′ de latitud N.

A menudo, se usa, en lugar de latitud, su complemento, que se llama *colatitud,* que será, pues, la distancia en grados al polo respectivo.

3. Distancia entre dos puntos de la superficie terrestre. — En Geometría hemos demostrado que la distancia más corta entre dos puntos de una superficie esférica, es el arco no mayor que una semicircunferencia del círculo máximo que los une, por tanto, la distancia más corta entre dos puntos de la superficie de la Tierra se medirá de idéntica manera.

Los navíos y aeronaves, en su navegación, siguen una trayectoria al trasladarse de un punto a otro, que se llama *ruta* o *derrota.*

Se llama *rumbo geográfico* de una ruta al ángulo que forma el meridiano con la ruta. También se suele llamar *dirección* o *rumbo* de un lugar respecto a otro,

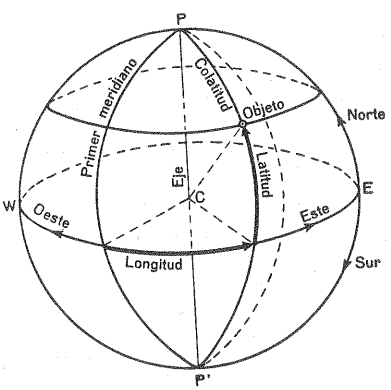


FIG. 37-1

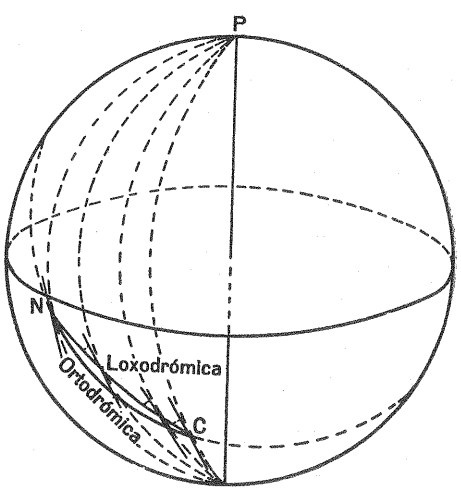


FIG. 37-2

al ángulo que forma el círculo máximo que pasa por esos dos lugares, con el meridiano del segundo.

En la navegación no se elige de ordinario el arco de círculo máximo como ruta, aunque sea el mínimo camino, sino que se prefiere seguir curvas llamadas *loxodrómicas,* que forman ángulo constante con el meridiano de cada punto que se atraviesa (figura 37-2).

En la actualidad, los grandes vuelos siguen rutas de arcos de círculo máximo, llamadas *ortodrómicas,* debiendo cambiar constantemente de rumbo.

Hállese como ejemplo, la distancia mínima geográfica entre Nueva York (74° log. O., 40° 43′ lat. N.), y El Cabo (18° 29′ log. E., 33° 56′ lat. S.).

Lo primero que debemos hallar es el lado *NC* del triángulo *NCP,* del que conocemos: (hágase la figura colocando *N* en Nueva York y *C* en El Cabo, aproximadamente, con los datos del problema).

$$P = 74° + 18° 29′ = 92° 29′$$
$$NP = 90° - 40° 43′ = 49° 17′$$
$$PC = 90° + 33° 56′ = 123° 56′$$

Conocemos dos lados y el ángulo comprendido, emplearemos para resolverlos [34-j] las fórmulas:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C \frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

Cálculos preliminares:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(123° 56′ + 49° 17′) = 86° 36′ 30″$$
$$\tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{2}(123° 56′ - 49° 17′) = 37° 19′ 30″$$
$$\tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2}(92° 29′) = 46° 14′ 30″$$

Aplicando las fórmulas:

log cotg 46° 14′ 30″	$= \bar{1}'981171$	log cotg 46° 14′ 30″	$= \bar{1}'981171$
log cos 37° 19′ 30″	$= \bar{1}'900481$	log sen 37° 19′ 30″	$= \bar{1}'782713$
colog cos 86° 36′ 30″	$= 1'227963$	colog sen 86° 36′ 30″	$= 0'000761$
log tg $\frac{1}{2}(A+B)$	$= 1'109615$	log tg $\frac{1}{2}(A-B)$	$= \bar{1}'764645$
$\frac{1}{2}(A+B) = 85° 33′ 27″$		$\frac{1}{2}(A-B) = 30° 11′$	

log tg 86° 36′ 30″	$= 1'227202$
log cos 85° 33′ 27″	$= \bar{2}'889015$
colog cos 30° 11′	$= 0'063275$
log tg $\frac{1}{2} NC$	$= 0'179492$

$$NC = 113° 2′$$

Como el arco de círculo máximo que une Nueva York y El Cabo mide 113° 2′, se trata de hallar su longitud,

$$\text{Distancia} = \frac{\pi R n^\circ}{180} = \frac{\pi \cdot 6.370 \cdot (13^\circ\ 2')}{180} = 12.566'790 \text{ Km.}$$

4. Fórmulas a emplear para hallar la distancia geográfica entre dos puntos *A* y *B* de la superficie terrestre. — Según se desprende del ejemplo anterior, para hallar la distancia entre dos puntos de la superficie terrestre, se ha de resolver previamente el triángulo esférico que forman esos dos puntos con el polo. De ese triángulo se conocen los dos lados, *colatitud de los dos puntos,* que no es más que el complemento de la latitud de cada punto, y el ángulo que forman ambos meridianos, igual a la diferencia (o suma) de las longitudes. Por tanto, llamando λ_1 y λ_2 a las respectivas longitudes, φ_1 y φ_2 a las latitudes y designando por *A* y *B* los ángulos del triángulo, las fórmulas se transforman en:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2) \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ-\varphi_1-90^\circ+\varphi_2)}{\cos \frac{1}{2}(90^\circ-\varphi_1+90^\circ-\varphi_2)} =$$

$$= \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(90^\circ-\varphi_1-90^\circ+\varphi_2)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(90^\circ-\varphi_1+90^\circ-\varphi_2)} =$$

$$= \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\widehat{AB} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ-\varphi_1+90^\circ-\varphi_2) \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} =$$

$$= \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

Una vez hallada la graduación del arco *AB,* se halla su longitud.

38. Esfera celeste. Coordenadas astronómicas

1. Esfera celeste. — Cuando levantamos nuestra vista hacia el firmamento, si la atmósfera está limpia de nubes, se ve aquél como una gran bóveda esférica, cuyo centro está ocupado por el observador.

Las estrellas semejan luces que se deslizan sobre la superficie de esa gran esfera de Este a Oeste, recorriendo trayectorias circulares, cuyos planos son paralelos entre sí y perpendiculares al eje del mundo.

Cada astro, aparentemente, da una vuelta completa por día, en realidad cada 23 h. 56 m. del tiempo marcado por nuestros relojes.

La distancia a que se encuentran los astros no es apreciada por nuestros sentidos. Tan sólo nos damos cuenta que se hallan a distancias mayores que las terrestres, y en apariencia, todos distan igual de nosotros.

Por eso, definiremos la esfera celeste *como una esfera de radio indeterminado, pero muy grande, cuyo centro es el de la Tierra o el observador, según veremos, y en cuya superficie se consideran proyectados todos los cuerpos celestes.*

En esta esfera se distinguen, lo mismo que en la Tierra:

Un eje del mundo, que es el diámetro celeste que contiene al eje terrestre, y cuyos extremos son los polos Norte y Sur.

Un ecuador celeste, que es el círculo máximo de la esfera celeste, cuyo plano es perpendicular al eje del mundo.

Paralelos celestes, que son círculos menores, cuyos planos son paralelos al ecuador.

Circulos horarios, que son los círculos máximos que pasan por los polos y que corresponden a los meridianos geográficos, pues sus planos se puede suponer que conciden.

Obsérvese que de la misma manera que son coincidentes los planos de los meridianos terrestres y los círculos horarios, también lo son los planos de los ecuadores celeste y terrestre, pero no los de los paralelos. Por cada astro se puede hacer pasar un círculo horario y un paralelo celeste, de los que nos vamos a servir para definir las coordenadas celestes.

2. Determinación de un astro en la esfera celeste. — Un astro queda determinado si se conoce su círculo horario y el paralelo en que está situado. La forma como se determina ese círculo horario, es decir, el modo de definir el primer círculo horario, da lugar a varios sistemas de referencia que iremos estudiando aquí.

Pero antes definiremos algunos conceptos que es necesario tener en cuenta.

Llamamos *cenit* de un observador al punto de la esfera celeste que está exactamente sobre su cabeza. Una plomada sostenida por el observador y prolongada hacia arriba cortaría a la esfera celeste en su cenit; en la figura, *Z*.

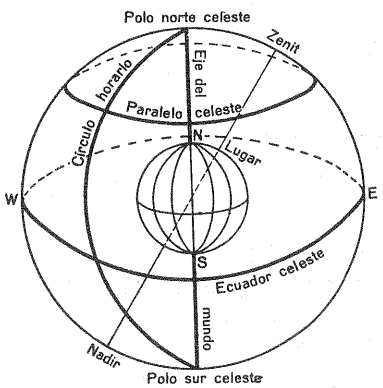


FIG. 38-1

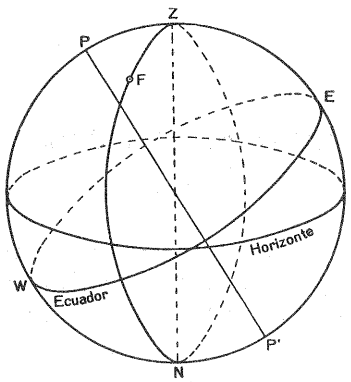


FIG. 38-2

Nadir es el punto diametralmente opuesto en la esfera celeste al cenit; en la figura, *N*.

Horizonte de un observador es el círculo máximo de la esfera celeste que tiene por polos el cenit y el nadir.

Círculo vertical de un astro, o simplemente *vertical de un astro,* es el círculo máximo que pasa por el cenit, nadir y el astro, por ejemplo *ZFN,* si *F* es el astro.

3. Coordenadas locales u horizontales de un astro. — Tiene por sistema de referencia el vertical del lugar y el horizonte.

El vertical del lugar es el meridiano que pasa por el cenit, es al mismo tiempo meridiano y vertical *ZPNP'* de la figura 38-2. El centro de la esfera celeste es el lugar de observación.

Las coordenadas son el *azimut, A,* figura 38-3, que es el ángulo formado por el vertical del lugar y el vertical del astro, *F,* pero como se puede tomar en dos sentidos, se ha establecido el siguiente convenio:

Si se toma como origen el semimeridiano vertical, que contiene al polo Norte *ZPH'WN,* entonces los azimutes se cuentan como positivos de Oeste a Este, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj, colocado con la esfera hacia el Norte y en el plano horizontal, en la figura sería $\widehat{H'O}$.

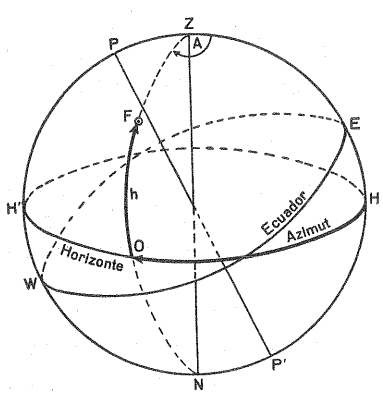


FIG. 38-3

Por el contrario, si el origen es el semimeridiano vertical que contiene el polo Sur, *ZEHP'N,* los azimutes se toman positivos, según se indica en la figura, *HO,* de Este a Oeste, o lo que es lo mismo, en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj colocado con la esfera hacia el Norte y en el plano horizontal.

El azimut lo mediremos sobre el horizonte, por eso es $A = \widehat{HO}$ desde 0° a 180°, o desde 0° a −180°.

La otra coordenada es la *altura h,* que es el arco *OF* de vertical que va desde el horizonte hasta el astro.

La altura varía desde 0° a 90°, positivamente hacia el polo Norte y negativamente hacia el polo Sur. El complemento de la altura es la distancia cenital, *FZ.*

4. Cómo medir el azimut y altura. — Ambas coordenadas se pueden medir con el *teodolito* (figs. 38-4 y 38-5), que consiste en esencia en un anteojo, que puede girar alrededor de un eje horizontal *E,* pudiéndose apreciar el giro en un limbo graduado *MNPQ* y colocado perpendicularmente al citado eje. En este limbo se leen las alturas, de la siguiente manera. Una vez nivelado el aparato, de modo que el limbo tenga en la vertical las inscripciones 90° y 270°, y en la horizontal las inscripciones 0° y 180°. Se comienza dirigiendo una mira por medio del anteojo al astro, de modo que éste ocupe el centro del retículo que lleva en su interior el anteojo, y el ángulo que forma la mira con el plano horizontal, es decir, el ángulo leído en el limbo vertical *MEL* es la altura.

El conjunto de anteojo y limbo vertical puede girar asimismo sobre otro eje vertical *EF,* de manera que el anteojo, en posición vertical, se deslice en su giro sobre otro limbo horizontal *BRA,* es decir, perpendicular al eje vertical, y que nos servirá: 1.°, para nivelar el aparato; 2.°, para leer los azimutes, lo cual se hará de la siguiente manera:

Nivelado el aparato como antes se dijo, se pone el limbo horizontal de modo que su 0° marque la dirección del Sur, lo cual se puede hacer en una primera aproximación con una brújula que suele llevar el aparato, o por la estrella polar u otro medio. Esto supone que el meridiano o vertical del lugar pasa por el centro y 0° del limbo horizontal y a él se puede referir el azimut del astro. Sólo nos

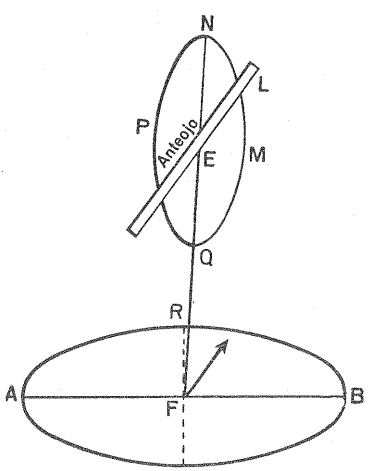


FIG. 38-4

Esquema del Teodolito

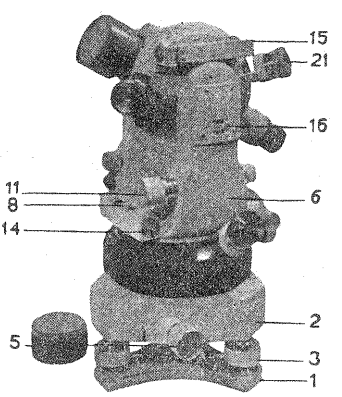


FIG. 38-5. — 1. Placa inferior. — 2. Base principal. — 3. Tornillos nivelantes. — 5. Tornillo coincidencia movimiento general. — 6. Cuerpo principal. — 8. Nivel sobre limbo acimutal. — 11. Corrección horizontalidad limbo cenital. — 14. Tapón regulación burbuja. — 15. Espejo visión del nivel. — 16. Tuercas corrección soportes muñones. — 21. Microscopios lectura.

resta medir cuánto gira horizontalmente el anteojo para que esté en su retículo el astro. Este giro se lee directamente en el limbo horizontal.

En muchas ocasiones, en lugar de utilizar la altura de un astro, es más conveniente emplear su distancia al cenit, o distancia cenital, que no es sino el complemento de la altura; *FZ* en la figura 38-3, según se dijo.

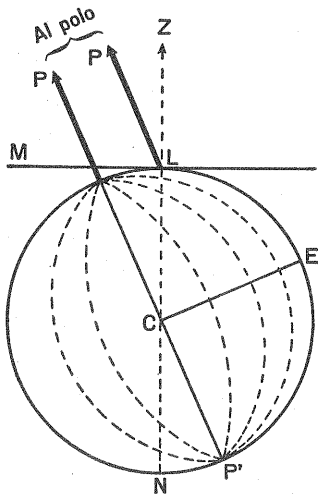


FIG. 38-6

5. Relación entre la latitud de un observador y la distancia cenital del polo. — En la figura 38-6, *C* es el centro de la Tierra, *L* el lugar donde está el observador, y por tanto el centro de la esfera celeste. La dirección de *Z* señala el cenit y por la gran distancia del polo *P* celeste, *LP* y *CP* son paralelos.

LCE es la latitud del observador, que es complementaria de *PCL* = *PLZ*, distancia cenital del polo. Luego, la altura del polo *PLM*, es igual a la latitud del lugar *LCE*, pues ambos ángulos tienen por complemento a *PLZ*.

6. Coordenadas ecuatoriales relativas. — Si en lugar de tomar como sistema de referencia el vertical del lugar y el horizonte, se toman el *meridiano del lugar y el ecuador celeste*, se tienen las coordenadas llamadas ecuatoriales relativas, y que son el *ángulo horario* t *y la declinación* d.

Meridiano del lugar es la intersección del meridiano terrestre que pasa por el lugar con la esfera terrestre, o lo que es lo mismo, es el círculo horario del lugar.

Ángulo horario del astro es el ángulo que forma el horario del astro con el meridiano del lugar. Se cuenta como positivo de Este a Oeste, o en el sentido en que se mueven las agujas del reloj colocado hacia el polo Norte, sobre el ecuador y desde 0° hasta 360°. En la figura 38-7, $t = \widehat{EB}$.

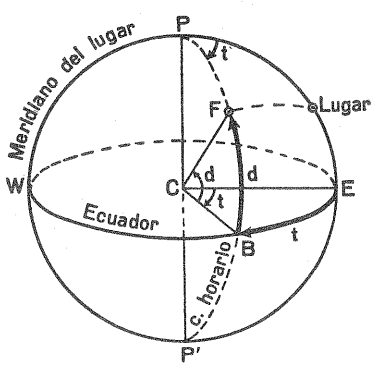


FIG. 38-7

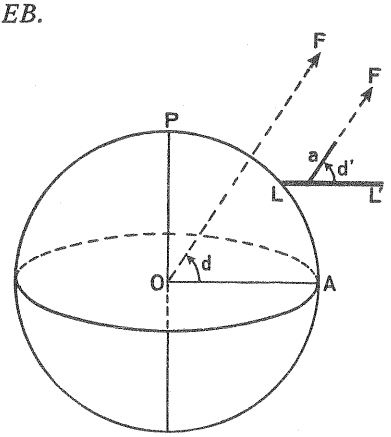


FIG. 38-8

Muy a menudo, el ángulo horario se da en unidades de tiempo, y entonces, para pasarlo a unidades de arcos, se tendrá en cuenta que una hora equivale $\frac{360°}{24} = 15°$

La declinación es $d = \widehat{BF}$, que no es sino el arco de meridiano que media entre el ecuador y el astro.

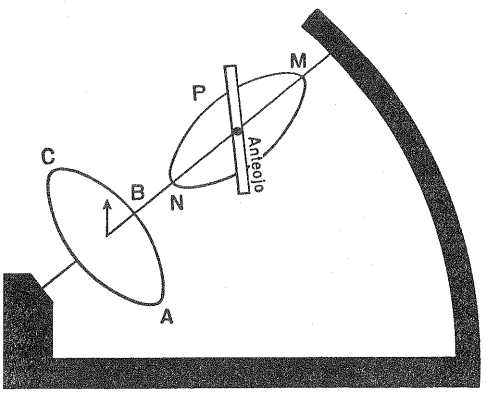


FIG. 38-9

7. Cómo medir directamente la declinación y el ángulo horario de un astro. — Se pueden tomar directamente la declinación y el ángulo horario por medio del *anteojo ecuatorial,* o simplemente la *Ecuatorial,* que en esencia es un teodolito, cuyo anteojo es de mayores dimensiones y mayor alcance, y que suele llevar un aparato de relojería, que le hace girar de modo que puede seguir el movimiento de cualquier astro (figura 38-9).

Para efectuar las mediciones se coloca uno de los limbos graduados *ABC* de modo que su plano sea paralelo al plano del ecuador y el otro *MPN* vertical, coincidente con el meridiano del lugar.

En la figura 38-8, *F* es una estrella que suponemos situada muy alejada de la Tierra. Las medidas se efectúan desde *L,* lugar de observación. Si *O* es el centro de la Tierra, el ángulo *d* es la declinación de la estrella, pero por el gran alejamiento de *F* se puede suponer que $d = d'$.

Siendo *a* el anteojo de la Ecuatorial y *LL'* su limbo paralelo al ecuador, la figura indica el modo de medir la declinación de *F* por medio de la Ecuatorial.

Al girar *F* en su movimiento aparente alrededor de la Tierra, habrá de girar el anteojo alrededor de su eje paralelo al eje de la Tierra (no señalado en la figura), y este giro medirá, precisamente, el ángulo horario de la estrella en cada instante.

8. Determinación de la hora de salida o puesta del Sol. — Esta determinación es un caso particular del problema resuelto en el número anterior de esta lección, teniendo en cuenta que tanto al salir como al ponerse, el Sol tiene altura de 0°, y por tanto el triángulo astronómico es rectilátero, según se ve en la figura 38-10, donde $ZS = 90 = a$, $NZ = 90 - \varphi$, $NS = 90 - d$.

EJEMPLO: ¿A qué hora se pone el Sol en Zaragoza (55° W, 41° 40′ N), un día en que la declinación del Sol es de 18° 30′ N?

Cálculos previos:

$$a = ZS = 90°; \qquad NZ = 90° - 41°\ 40' =$$

$$= 48°\ 20';$$

$$NS = 90° - 18°\ 30' = 71°\ 30'.$$

Aplicando la fórmula $\cos A = -\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c$

en la que $A = t$, $b = 48°\ 20'$, $c = 71°\ 30'$

$$\cos(\pi - A) = \operatorname{cotg} 48°\ 20' \operatorname{cotg} 71°\ 30',$$

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{cotg} 48°\ 20' = \bar{1}'949353 \\ \log \operatorname{cotg} 71°\ 30' = \bar{1}'524520 \\ \hline \log \cos(\pi - A) = \bar{1}'473873 \end{array}$$

$$\pi - A = 72°\ 40'\ 36'' \qquad A = 107°\ 19'\ 24''$$

Se pone el Sol a las $\dfrac{107°\ 19'\ 24''}{15} = 7$ h. 9 m. $17\dfrac{3}{3}$ seg. de la tarde.

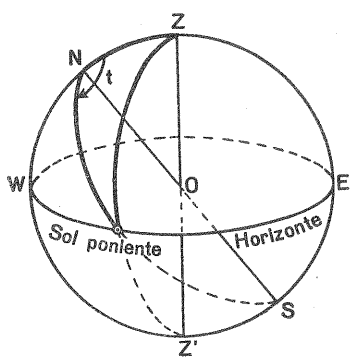


FIG. 38-10

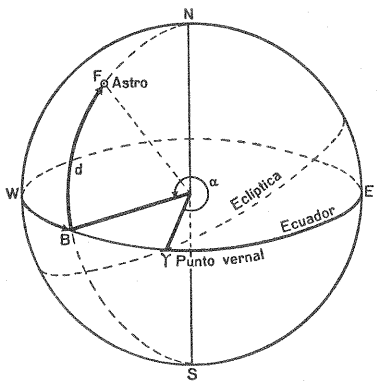


FIG. 38-11

9. Coordenadas ecuatoriales absolutas. — Como en el caso anterior, la esfera celeste tiene por centro el centro de la Tierra, y el sistema de referencia es el mismo, la única diferencia estriba en la fijación del origen del ángulo horario, que en este caso es un punto fijo del ecuador celeste, llamado *punto vernal*, que se determinará en la lección siguiente.

El ángulo horario aquí se llama *ascensión recta* α. Las coordenadas son pues: ascensión recta y declinación (α, d).

Según se ve en la figura 38-11, la ascensión recta γLB se cuenta a partir de γ (punto vernal), de Oeste a Este, sobre el ecuador, es decir, contrario al movimiento de las agujas de un reloj colocado hacia el Norte, en el plano del ecuador,

desde 0° hasta 360°, y la declinación sobre el meridiano horario del astro, a partir del ecuador hacia los polos, desde 0° a 90°.

Obsérvese que la ascensión recta es el ángulo formado por los meridianos que pasan respectivamente por el punto vernal y por el astro.

10. Cambio de sistema de coordenadas. — Según se ha podido observar en el problema resuelto en [38-7], se ha medido la declinación desde el lugar del observador, y no desde el centro de la Tierra, como debiera, pues el sistema de referencia de declinación y ángulo horario tiene ese centro. Eso se ha podido hacer sin error apreciable, porque se ha supuesto que el astro está muy alejado. En caso contrario ese error no sería despreciable, y se hubiera tenido que hacer una corrección llamada de *paralaje,* que no es el caso de explicar aquí. Tampoco se ha tenido en cuenta la refracción que sufren los rayos de luz al atravesar la atmósfera, por lo cual sus alturas y declinaciones no son las leídas en los instrumentos de medida, que en cálculos de gran exactitud ha de tenerse en cuenta, y cuya corrección rebasa los límites del estudio que hacemos.

Hemos visto que los instrumentos con que se miden las coordenadas locales (teodolitos y otros), son de uso relativamente frecuente, y la medida de latitud y azimut, relativamente fácil de hacer.

No es tan frecuente el disponer de una Ecuatorial u otro instrumento con que medir las coordenadas ecuatoriales, tanto relativas como absolutas, por lo que es muy conveniente saber pasar de un sistema de coordenadas a otro, que es lo que pretendemos hacer aquí. En la fig. 38-12, F es un astro, $\widehat{EB} = \widehat{P}$ es el ángulo horario t, $\gamma B = \alpha$ es la ascensión recta de F, $E\gamma = \theta$ es el tiempo sidéreo, determinado por el ángulo que forma el meridiano del lugar y el meridiano que pasa por el punto vernal, γ.

$CF = h$ es la altura de F.

$BF = d$ es la declinación de F.

$ZE = \varphi$, es la latitud del lugar.

Ángulo FZE es el ázimut de F.

Por tanto, en el triángulo astro-polo-cenit FPZ.

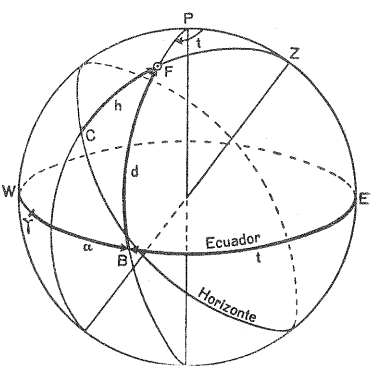


FIG. 38-12

Se tiene:

Ángulo $FPZ = t$, ángulo horario de F ..... (A)

Ángulo PZF = suplemento de ázimut $= \pi - A$ ..... (C)

Ángulo $PFZ = \lambda$ ..... (B)

Lados: PZ = colatitud de $Z = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ ..... (b)

FZ = distancia cenital de $F = \dfrac{\pi}{2} - h$ ..... (a)

FP = distancia polar de $F = \dfrac{\pi}{2} - d$ ..... (c)

Para pasar de coordenadas locales φ, A y h a coordenadas ecuatoriales relativas, se aplican las analogías de Neper [35-8], y teniendo en cuenta los datos anteriores, y su correspondencia con los ángulos y los lados, del triángulo a que hacen referencia las fórmulas, es fácil escribir:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(t+\lambda) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-h)}{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi+h)}; \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(t-\lambda) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi-h)}{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+h)}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-d\right) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h+\varphi)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(t+\lambda)}{\cos\tfrac{1}{2}(t-\lambda)}$$

que nos permite calcular t, λ y d, en función de φ, h y A.

Y al contrario, teniendo en cuenta consideraciones parecidas a las anteriores, y las mismas analogías,

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(A+\lambda) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t\,\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi-d)}{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+d)}; \qquad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\lambda-A) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-d)}{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi+d)}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi-d)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\lambda-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(\lambda+A)}$$

que nos permite calcular A y h, en función de φ, t y d.

El paso de coordenadas ecuatoriales absolutas a relativas, y recíprocamente, se hace sencillamente teniendo en cuenta que ambos sistemas tienen por segunda coordenada la declinación, y que la ascensión recta α viene relacionada con el ángulo horario t, en valor absoluto, por la siguiente igualdad:

$$\theta = t + \alpha \quad \text{de aquí,} \quad \alpha = \theta - t$$

con lo que el paso indicado es sencillo.

Y por fin, para pasar de coordenadas locales a coordenadas ecuatoriales absolutas, se pasan aquéllas a coordenadas ecuatoriales relativas, y luego se hace como se ha indicado en el primer caso.

39. Movimientos de la Tierra

1. Sistema de Copérnico. — Los antiguos, dando crédito a las apariencias, suponían que la Tierra, inmóvil, ocupaba el centro del Universo y que las estrellas estaban fijas en la esfera celeste, la cual realizaba un giro completo alrededor de uno de sus diámetros en el transcurso de un día.

El Sol y la Luna (astros errantes) describían trayectorias circulares alrededor de la Tierra, pero independientes de la esfera celeste. En cambio, suponían que los planetas describían trayectorias circulares móviles, cuyo centro recorría alrededor de la Tierra otro círculo diferente para cada uno. Así conseguían explicar el movimiento de los planetas, unas veces directo y otras retrógrado (fig. 39-1).

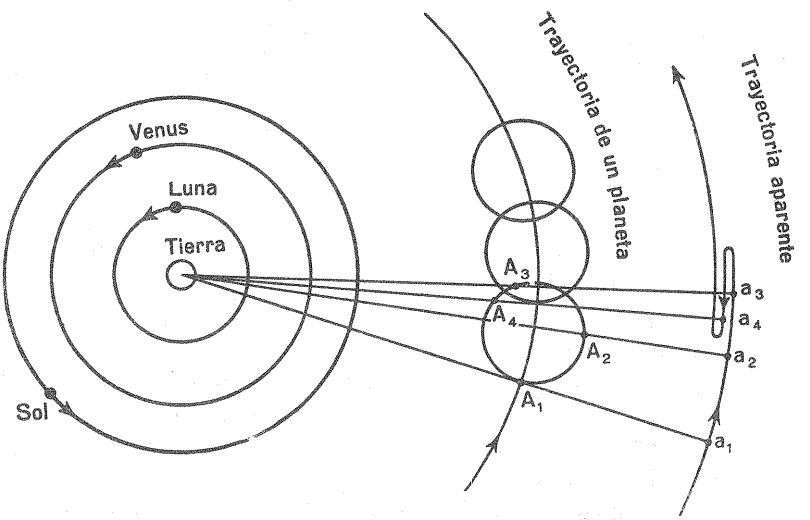


FIG. 39-1

Pero este movimiento, de suyo complejo, se complicaba más conforme se disponía de medios para obtener observaciones más precisas, al intentar así explicar las diversas posiciones de dichos astros a lo largo del tiempo. Esta hipótesis no contentó a Copérnico, por lo cual, después de una larga y paciente labor, en 1543 publicó un trabajo, que cambió totalmente las ideas que hasta entonces se creían invariables. Copérnico sienta los siguientes principios que han servido de base a la actual concepción del Universo:

Las estrellas están fijas en el espacio, cada planeta describe una trayectoria circular alrededor del Sol, cuyo plano pasa por el centro de éste y se apartan lige-

ramente del plano de la eclíptica o trayectoria de la Tierra. Cada planeta, al mismo tiempo que gira alrededor del Sol, está animado de un movimiento alrededor de sí mismo.

En la actualidad se sabe que las estrellas no están inmóviles, sino que recorren trayectorias muy diversas, puesto que cambian sus posiciones relativas con el transcurso de los años.

Kepler demostró que la trayectoria de los planetas alrededor del Sol no es circular, sino elíptica, uno de cuyos focos ocupa el Sol y que para un mismo planeta, las áreas barridas por un radio vector, son iguales si corresponden a tiempos iguales.

En resumen, la Tierra como planeta que es, está animada de dos movimientos, uno de traslación, alrededor del Sol, y otro de rotación, sobre uno de sus diámetros.

2. Pruebas de la traslación de la Tierra. — 1.ª El Sol tiene un volumen 1.300.000 mayor que el de la Tierra, y parece más natural que sea ésta quien gire alrededor de aquél que no lo contrario.

2.ª La observación directa demuestra que los planetas giran alrededor del Sol, la Tierra, uno de ellos, no ha de ser una excepción.

3.ª El movimiento, aparentemente irregular de los planetas (fig. 39-2), que aparece unas veces directo y otras retrógrado, se explica satisfactoriamente admitiendo la traslación de la Tierra, según se puede apreciar en la figura.

4.ª Está demostrado que las estrellas describen cada año una pequeña elipse, que se explica satisfactoriamente considerando que el observador terrestre se traslada durante el año alrededor del Sol.

3. Pruebas del movimiento de rotación de la Tierra. — Observando el cielo, vemos que los astros aparecen por el Este, recorren la esfera celeste en trayectorias paralelas y desaparecen por el Oeste.

Hoy se sabe perfectamente que ese movimiento no es más que aparente, y es ocasionado porque la Tierra da vueltas alrededor de uno de sus diámetros (eje terrestre) en sentido contrario, es decir, de Oeste a Este, en un día.

Se prueba: 1.° Porque la Tierra es un planeta, y se demuestra experimental y directamente que los planetas están animados de movimiento de rotación.

2.° No es admisible el movimiento de las estrellas alrededor del eje terrestre, pues por el alejamiento de algunas de ellas, para dar una vuelta alrededor de la Tierra en un día, sería necesario que tuvieran una velocidad miles de veces mayor que la de la luz, cosa que no parece probable. Por otra parte, esas velocidades fantásticas desarrollarían inmensas fuerzas centrífugas, que deberían ser neutralizadas con fuerzas de atracción que no existen.

3.° La misma variación del valor de la aceleración de la gravedad se explica satisfactoriamente con el movimiento de rotación. En efecto, la gravedad vale 983 cm. aproximadamente en los polos y 978 en el ecuador, no siendo suficiente para explicar esta diferencia la desigualdad del radio terrestre, pero se explica con todo rigor por el efecto de la fuerza centrífuga, debida a la rotación de la Tierra, máxima en el ecuador y nula en los polos.

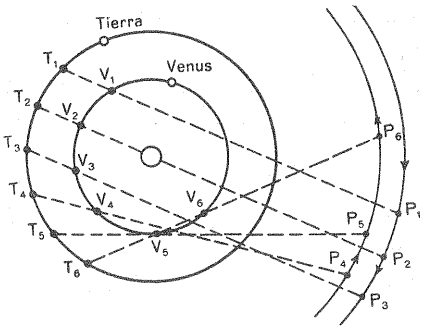


FIG. 39-2

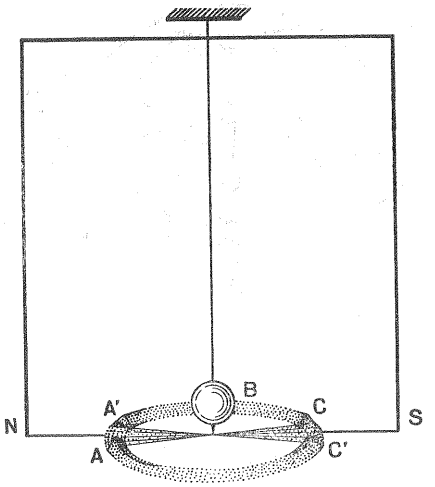


FIG. 39-3

4.° Finalmente, en 1851, el físico Foucault demostró experimentalmente esta rotación de la siguiente manera:

Suspendió un péndulo de 64 m. de la bóveda del Panteón de París, que terminaba en una esfera con un pequeño estilete en la parte inferior, el cual, en su movimiento cortaba un círculo de arena *ABC,* cuyo centro era la proyección vertical del punto de suspensión. Se imprimió un movimiento pendular al conjunto en el plano *NS,* y se vio cómo el punto en que el estilete cortaba al círculo de arena, avanzaba por la parte Sur hacia el Oeste *C,* lo cual no puede explicarse más que admitiendo el movimiento de la Tierra, ya que la Física demuestra la invariabilidad del plano de oscilación en el péndulo.

4. Movimiento aparente de los astros. — Los dos movimientos anteriormente citados, dan lugar, como se ha dicho, al ficticio movimiento de los astros en el cual nos basaremos, por ser su estudio mucho más fácil que el real, y conducir a los mismos resultados. En este movimiento, nos vamos a fijar especialmente en el Sol, que no sigue, como es natural, fijamente en la bóveda celeste, sino que por el contrario, aparentemente recorre a lo largo del año un determinado camino, que llamamos eclíptica (en realidad es la Tierra quien recorre ese camino), que es un círculo máximo de la esfera celeste, cuyo plano no coincide con el del ecuador, sino que forma con él un ángulo de 23° 27′; esta circunstancia origina una serie de fenómenos geográficos, astronómicos y climáticos.

5. Eclíptica. Los Trópicos. Las Estaciones. — Si a lo largo del año se mide diariamente la ascensión recta y declinación del Sol, y representamos esos puntos en la esfera celeste, obtendremos un círculo máximo, que es la eclíptica, pues representa el camino aparentemente seguido por el Sol a lo largo del año.

Este círculo máximo es recorrido por el Sol de Oeste a Este en un año, que como hemos dicho, forma con el ecuador un ángulo de 23° 27′ y corta a éste en

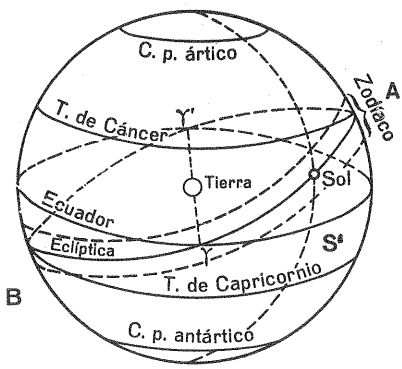


FIG. 39-4

dos puntos diametralmente opuestos que se denominan *equinoccio de primavera* o *punto vernal* γ y *equinoccio de otoño* γ'. Como se ve en la figura 39-4, en el punto vernal γ el Sol pasa de declinación negativa a positiva.

Los puntos *A* y *B*, distantes del punto vernal 90°, se llaman *solsticios*, siendo de verano el que tiene en el hemisferio Norte declinación positiva, y el otro es *solsticio de invierno*.

El punto vernal se representa por la letra γ a causa de que prácticamente coincide con la estrella γ de la constelación de Aries. El triángulo $\gamma SS'$ rectángulo en S' nos permite calcular el ángulo $S\gamma S'$ de la eclíptica con el Ecuador, conociendo la declinación $d = SS'$ y la ascensión recta del Sol en este caso,

$$\alpha = \gamma S' \qquad \text{pues,} \qquad \operatorname{tg} S\gamma S' = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Los círculos paralelos que pasan por los solsticios, es decir, que distan del ecuador 23° 27′, se llaman **Trópicos**, de **Cáncer** el boreal, y de **Capricornio** el austral, por estar respectivamente los solsticios de verano y de invierno en las constelaciones de Cáncer y de Capricornio.

A una distancia de 23° 27′ de los respectivos polos están los círculos polares, *Ártico* y *Antártico*. Estos círculos delimitan las zonas en las que por lo menos un día del año, el Sol no tiene ocaso.

La zona que comprende 9° a uno y otro lado de la eclíptica se llama **Zodíaco**; en ella se encuentran unas constelaciones por las que aparentemente va pasando el Sol a lo largo del año, y son: Aries corresponde al punto vernal, Tauro y Géminis a la primavera; Cáncer está en el solsticio de verano, Leo y Virgo, correspondientes al verano, estando Libra en el equinoccio de otoño; Escorpio y Sagitario correspondientes al otoño, y Capricornio situada en el solsticio de invierno; por fin Acuario y Piscis corresponden al invierno (fig. 39-4).

Las estaciones. El tiempo que transcurrre entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto vernal o equinoccio de primavera, se llama **año trópico**, el cual se divide en cuatro períodos de desigual duración, llamados estaciones. La *primavera* comienza en el punto vernal γ, el día 21 de marzo, y llega hasta el 21 de junio, solsticio de verano *A*. El verano, comienza el 21 de junio, *A*, y llega hasta el 23 de septiembre, equinoccio de otoño, γ'. El *otoño*, que comienza en γ', 23 de septiembre y termina en el solsticio de invierno, *B* y, finalmente, sigue el invierno, que comienza el 22 de diciembre y dura hasta el equinoccio de primavera γ.

6. Desigualdad de los días. — Si la eclíptica coincidiera con el ecuador, resultaría que los días serían constantemente iguales, pues en todo momento el Sol iluminaría una zona de la Tierra delimitada por un meridiano, y por lo tanto, cada punto de la superficie permanecería iluminada la mitad del tiempo que la

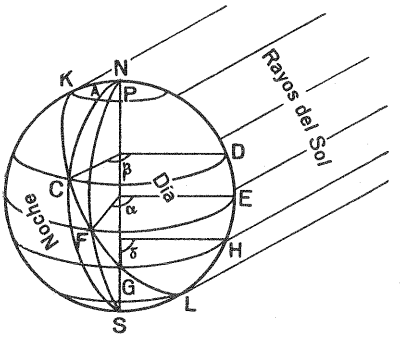


FIG. 39-5

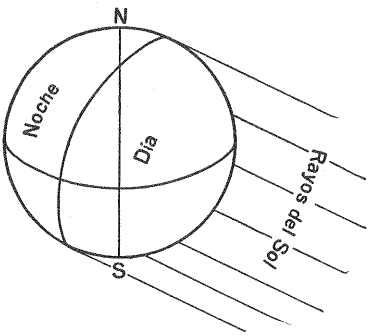


FIG. 39-6

Tierra tarda en dar un giro completo, a excepción de los polos, donde el Sol giraría constantemente en el horizonte. Pero no es así, sino que unas veces el Sol está al norte del Ecuador y entonces (verano), el hemisferio iluminado en cada instante no está limitado por un meridiano, y existe una zona, *A*, en el casquete Ártico, que goza de día permanente. Lo contrario sucede en el invierno.

Además, si nos fijamos en la figura 39-5, el punto *F* del ecuador permanece iluminado el tiempo necesario para que la Tierra verifique un giro de 2α, mientras que la iluminación de los puntos *C* y *G*, dura los tiempos que necesita la Tierra para verificar los giros de 2β y 2δ, pero evidentemente $2\beta > 2\alpha > 2\delta$, lo que nos prueba que el tiempo de luz será mayor en *C* que en *F*, y en *F* mayor que en *G*.

En resumen, en el ecuador los días de luz son siempre iguales, pues el círculo máximo *CFG* corta al ecuador en los extremos de un diámetro, lo cual quiere decir que en cada instante y para cualquier posición, el Sol ilumina la mitad del ecuador, o sea, que el día de luz es exactamente igual a la mitad del día natural. En cambio, conforme nos adelantamos hacia el polo Norte, los días se hacen más largos durante el verano y más cortos según nos acercamos hacia el polo Sur. Exactamente lo contrario se puede decir durante el invierno.

Habrá tan sólo dos días en cada año que son exactamente iguales a las noches, para toda la Tierra, y esto sucede precisamente en los equinoccios, es decir, en los dos momentos en que el Sol tiene declinación nula, lo cual ocurre el 21 de marzo, equinoccio de primavera, día en que ésta da comienzo y el 23 de septiembre, equinoccio de otoño, que es cuando éste empieza.

En cambio, el día 21 de junio es cuando el Sol adquiere la máxima declinación norte, es el solsticio de verano, o comienzo de éste; el 22 de diciembre es el solsticio de invierno, comienzo de éste, y es cuando el Sol tiene una declinación negativa máxima.

Evidentemente, que el arco *NK* en el solsticio de verano vale 23° 27′; esto quiere decir que en ese período las tierras colocadas al Norte del círculo Ártico gozan de día permanente, y el casquete Antártico está sumergido en una noche continua. Lo contrario sucede durante el invierno.

7. Zonas terrestres. Diferencias climáticas de las estaciones. — La zona de superficie esférica comprendida entre los dos trópicos recibe el nombre de *zona tórrida.* El Sol pasa dos veces al año por el cenit de todos los puntos de esta zona, cuando la latitud del lugar coincide con la declinación del Sol. Los rayos del Sol inciden normales o poco menos, lo cual es causa de que sea calurosa, y por lo tanto cuando es húmeda, muy fértil y sumamente árida cuando falta el agua.

Las zonas comprendidas entre los trópicos y sus respectivos círculos polares, se designan con el nombre de *zonas templadas.*

En la zona templada del Norte, durante la primavera y el verano, recibe los rayos del Sol con poca inclinación, y si añadimos que la duración del día de luz es mayor que la mitad del día natural, da por resultado un clima parecido al de zona tórrida por lo caluroso. En cambio, durante el otoño y el invierno, los rayos del Sol llegan con gran inclinación y la duración del día de luz es menor que la mitad del día natural. Estas dos causas originan poco calentamiento durante el día y mucha irradiación durante la noche. El clima es frío y generalmente acompañado de abundantes precipitaciones acuosas y sólidas.

En la zona templada del hemisferio Sur sucede lo mismo pero en sentido inverso, es decir, es caluroso el invierno y frío el verano.

Los casquetes limitados por los círculos polares, forman las zonas glaciares. Los días de luz en el Ártico, durante la primavera y el verano tienen una duración que varía desde 0 horas a seis meses, según los puntos, y lo mismo podemos decir del casquete Antártico durante el otoño e invierno.

Aunque en el período de día perpetuo reciben mucho tiempo los rayos del Sol, como éstos inciden tan inclinados, producen poco calentamiento. Por eso en estas zonas reinan temperaturas muy bajas y dominan los perpetuos hielos.

40. Tiempo. Su medida

1. Día solar. Día sidéreo. — El día solar es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un mismo meridiano terrestre. Se comienza a contar desde el momento en que el Sol pasa por el antimeridiano del lugar, y se divide en 24 horas de 15° cada una.

Los días solares no son iguales, debido a dos causas principalmente: La inclinación de la eclíptica sobre el ecuador y la ley de las áreas de Kepler, por lo cual se ha adoptado como medida *un día solar medio,* o la media de los días solares verdaderos de un año, que sería el de un Sol que recorriera la eclíptica de modo que su proyección sobre el ecuador S' (fig. 39-4), recorriera este círculo con movimiento circular uniforme.

Llamamos día sidéreo al tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por el mismo meridiano terrestre de un punto fijo del cielo, una estrella por ejemplo. El día sidéreo comienza a contarse en el instante en que el punto vernal pasa por el meridiano del lugar; y se divide en 24 horas siderales, cada hora en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos siderales. La señalan los relojes siderales, de uso en los observatorios astronómicos.

Es fácil ver que el día solar es más largo que el día sideral, según se aprecia en la figura 40-1 cuando la estrella E pasa dos veces por el meridiano de A, todavía le falta girar el arco AB para completar el día solar, es decir, que éste supera al día sidéreo en el tiempo que necesita la Tierra para verificar el giro correspondiente al arco AB.

Según los cálculos obtenidos por la observación, *un día solar medio* equivale a 24 horas, 3 minutos y 56'35 segundos siderales.

El día solar medio o día civil comienza, según se dijo, a media noche, y se divide, como el sideral, en horas, minutos y segundos solares.

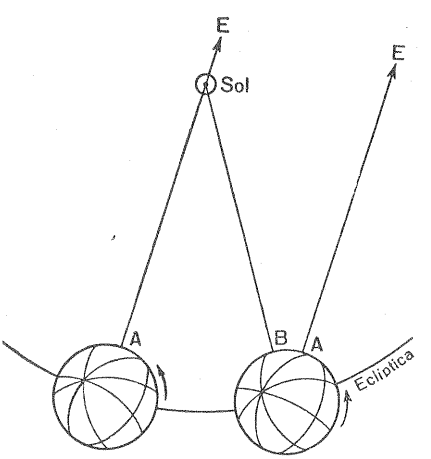


FIG 40-1

2. Manera de conocer el tiempo sideral. Ecuación del tiempo. — Los barcos, cuando se encuentran en alta mar, y desean saber la hora sideral del lugar, lo consiguen de la siguiente manera. Determinan la altura del Sol o de otro astro en el momento en que pasa por el meridiano, y con ese dato o su complemento, la distancia cenital, consultan unas tablas en las que viene dada la ascensión recta α del Sol al mediodía, y de otros

muchos astros a su paso por el meridiano, en función de su altura o distancia cenital en la misma posición.

Esta ascensión recta es la misma que el tiempo transcurrido desde el paso del punto vernal por el meridiano del lugar, que es precisamente el tiempo sideral local, como se puede deducir de la figura 39-4, teniendo en cuenta que la Tierra está en el centro de la esfera celeste y gira de Oeste a Este.

El *tiempo sidéreo* viene dado por el ángulo θ que el punto vernal forma con el meridiano del lugar.

El *tiempo solar verdadero* viene dado por el ángulo t_v, que el antimeridiano del lugar forma con el círculo horario del Sol o meridiano por el que pasa en ese instante el Sol.

El *tiempo solar medio* o *tiempo medio* se mide por el ángulo t_m que el círculo horario del *Sol medio* forma con el antimeridiano del lugar.

Es evidente que $t_v \neq t_m$, por lo que a la diferencia

$$t_m - t_v = e,$$

se le llama *ecuación del tiempo,* y cuyo valor se puede encontrar calculado y tabulado en los anuarios astronómicos.

Por otra parte, si llamamos t al ángulo horario del Sol, es decir, el ángulo que su círculo horario forma con el meridiano del lugar, y α es la ascensión recta del mismo astro, entre ambos ángulos existe la siguiente relación:

$$\theta = \alpha + t$$

que es fácil deducir, teniendo en cuenta, en la figura 39-4, la misma observación hecha anteriormente.

3. Valores de las diversas unidades naturales del tiempo. — Distinguiremos: el *año trópico,* que es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto vernal; medido en días medios vale 365 días medios, 5 horas, 48 minutos y 47'5 segundos = 365'242217 días medios.

Año sidéreo es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el mismo punto del cielo, por ejemplo, frente a una estrella. El año trópico no es igual al año sidéreo, debido a la precesión o adelanto de los equinoccios en 50'2 segundos, es decir, que el punto vernal, intersección de la elíptica con el ecuador, no es fijo en la esfera celeste, sino que se traslada cada año hacia el Oeste 50'2 segundos, lo cual hace que el año sidéreo sea igual a 365 días solares medios, 6 horas, 9 minutos y 10'5 segundos.

En un año la Tierra recorre la eclíptica, 360°, esto quiere decir, que el arco AB de la figura 40-1, al final de un año es evidente que vale una circunferencia completa, o lo que es lo mismo, en un día medio el arco AB vale

$$360 : 365'242217 = 0°\ 59'\ 8{,}3''$$

Luego, el día medio será igual al giro completo de la Tierra, más el tiempo empleado en girar $AB = 0°\ 59'\ 8{,}3''$, que es

$$\frac{24\ \text{h.}}{360} \cdot 0°\ 59'\ 8{,}3'' = 0\ \text{h.},\ 3\ \text{m.},\ 56'5\ \text{seg.}$$

Es decir,

$$1 \text{ día medio} = 1 \text{ día sidéreo} + 0 \text{ h., } 3 \text{ m., } 56'5 \text{ s.} = \\ = 1'00274 \text{ días sidéreos.}$$

El día sidéreo es la unidad de tiempo astronómica por excelencia; así como el día solar lo es en la vida práctica y civil, que se regula por el Sol, pero esta última tiene el grave inconveniente de que su valor, a lo largo del año no es constante. Por esta causa ha habido necesidad de inventar la unidad del día solar medio, que es el que rige en nuestros relojes.

4. Tiempo legal. — Tanto la hora sidérea como la solar media es evidentemente la misma a lo largo del mismo meridiano, aunque diferente para el antimeridiano, y diferente también de un meridiano a otro.

Sucede, pues, que en las naciones cuyo territorio tenga una cierta extensión, tendrán distinta hora las distintas ciudades. Este mismo inconveniente se presenta en las naciones próximas. Para obviarlo y favorecer las relaciones, tanto dentro de la misma nación como entre naciones vecinas, se ha establecido generalmente la misma hora para todos los puntos de un mismo país, y la mayoría de las naciones han elegido su hora legal de modo que corresponda a un sistema de *husos horarios,* de 15 grados cada uno, en que se ha dividido el *mapa-mundi.* Según esto, a la Tierra corresponden 24 husos de 15 grados cada uno, lo que equivale a 1 h. de longitud.

El primer huso está partido en dos mitades iguales por el meridiano de Greenwich y todos sus puntos adoptan la hora de Greenwich, la cual sirve por convenio para toda Europa Occidental. Existe en Europa otra hora para el Centro, que corresponde al siguiente huso hacia el Este, y finalmente, otra hora por la que se guía Europa Oriental, que corresponde al huso siguiente, es decir, que lleva dos horas de adelanto con el de Greenwich.

Así todos los relojes del mundo señalan los mismos minutos y segundos, pero con 24 horas diferentes.

5. Otros movimientos de la Tierra. — Además de los movimientos estudiados, de rotación y traslación, la Tierra posee otros dos que se conocen con los nombres de *precesión* de los equinoccios, ya aludido en los apartados anteriores y el de *nutación.*

Al observar las coordenadas de las estrellas se puede apreciar que sus ascensiones rectas varían con el tiempo, en cambio, sus latitudes celestes permanecen constantes. Esto no se explica satisfactoriamente más que admitiendo un lento avance del punto vernal del Este hacia el Oeste, cuyo valor, calculado cuidadosamente, es muy aproximadamente 50,2″ por año. Consecuencia de esto es que el eje de la Tierra describe un cono de revolución alrededor de la perpendicular al plano de la eclíptica trazada por el centro de la Tierra, cuya duración será de

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60 \text{ seg.}}{50{,}2 \text{ seg.}} = 25.920 \text{ años}$$

y de manera que el ángulo formado por dichas rectas vale 23° 27′.

Esto supone que la primavera se anticipa cada año un arco de 50,2″, y que al cabo de 25.920 años, dicha estación habrá recorrido todas las constelaciones del zodíaco.

Este movimiento se conoce con el nombre de *precesión de los equinoccios*, que hemos apreciado al comparar el año trópico con el sideral.

Además, debido a otras causas, en 19 años aproximadamente, el eje de la Tierra describe otro cono elíptico que se superpone al anterior y que se conoce con el nombre de *nutación*.

41. Calendario

1. Definiciones. — Calendario es una distribución del tiempo en períodos adaptados a la vida social y religiosa.

Los períodos naturales que han servido de base a los diversos calendarios son: el día, común a todos ellos, el ciclo lunar o lunación, período que tarda la Luna en una revolución alrededor de la Tierra, que ha dado lugar a los meses, y el año solar, o tiempo que tarda la Tierra en dar una revolución alrededor del Sol. Como se ha dicho, existen tres clases de días, a saber: *día solar verdadero, día solar medio y día sidéreo.* En cambio, el año solar o trópico, arriba definido, difiere tan poco del año sidéreo, que no vale la pena tenerlo en cuenta.

Para el cómputo ordinario del tiempo no se puede tomar como base el día solar verdadero, pues su duración es variable, ni el día sidéreo, por la importancia que tiene el Sol, por lo que se tiene como unidad práctica el día solar medio. Pero surge un inconveniente, y es que el año no consta de un número exacto de días y esta circunstancia ha dado lugar a una serie de complicaciones en la medida del tiempo, que debe resolver el calendario.

Comencemos por ver que medido cuidadosamente el año trópico, ha dado

$$\text{año trópico} = 366'2422 \text{ días sidéreos.}$$

Por consiguiente (fig. 40-1), teniendo en cuenta que el giro de la Tierra, en el mismo sentido que lo hace alrededor del Sol, se deduce:

$$\text{año trópico} = 366'2422 - 1 = 365'2422 \text{ días solares medios.}$$

Por ende,

$$\text{un día solar medio} = \frac{366'2422 \text{ días sidéreos}}{365'2422} = 1 \text{ día, } 3^m, 56'5^s \text{ sidéreos}$$

El año, pues, consta de

$$365'2422 \text{ días} = 365 + 0'25 - 0'0075 - 0'0005 =$$

$$= 365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} - \frac{5}{10.000} \text{ días solares medios.} \qquad [41\text{-a}]$$

2. Calendario antiguo. — Dejando aparte los calendarios basados en ciclos o años lunares, desde antiguo se impuso el cómputo del tiempo a base del año solar, pero por desconocer el verdadero valor del año trópico, existía una discordancia, más o menos acusada, entre el año astronómico y el civil.

Ciñéndonos a Roma, hasta Marco Antonio, el año constaba de 304 días, repartidos en 10 meses. Más tarde se añadieron los meses de Julio y Agosto, antes de la llamada reforma Juliana, debida a Julio César, siendo el cómputo del tiempo algo inestable y cambiante. Este estado de cosas ocasionó una notable discordancia entre el tiempo astronómico y civil, que hizo necesaria la reforma de Julio César.

Reforma Juliana. En 707 de la fundación de Roma, año 47 a. de J. C., el equinoccio civil se había adelantado más de dos meses al astronómico, por lo que al otoño astronómico casi correspondía el invierno civil.

Para volver las cosas a su punto, Julio César, asesorado por el astrónomo Alejandrino Sosígenes, ordenó dos cosas: 1.° Para restablecer la coincidencia entre el año civil y el astronómico, mandó añadir a aquel año, 47 a. de J. C., dos meses de 33 y 34 días respectivamente, con lo que el equinoccio de primavera se verificaba el 25 de Marzo. Así resultó un año de 445 días, que se llamó *año de la confusión.*

2.° Estableció el año de 365 días, y para compensar el cuarto de día sobrante, cada cuatro años añadía un día. Así quedó el año de 12 meses, de los que los impares eran de 31 días y los restantes de 30, excepto Febrero, que era de 29. Algo más tarde se quitó un día a Febrero y se estableció la duración actual de los meses.

Este calendario se vino observando casi sin interrupción hasta el año 1582, en que fue necesaria otra reforma, ya que al año de Sosígenes le faltaban $11^m\ 12^s$ y por consiguiente se producía un retraso del año civil de un día cada 128 años.

3. **Reforma Gregoriana.** — El error cometido por Sosígenes se acumuló, de modo que en el 325, año del Concilio de Nicea, el equinoccio tuvo lugar el 21 de Marzo y en el 1582, el 11 del mismo mes.

Entonces, Gregorio XIII, en este año ordenó volver a la coincidencia equinoccial del Concilio de Nicea; se suprimieron 10 días del calendario civil, pasando del 4 de Octubre de 1582 al 15 del mismo mes. Y como el error del calendario Juliano era aproximadamente de 3 días por cada 400 años, no debían contarse bisiestos los años múltiplos de 100, excepto si lo eran de 400.

Esta reforma fue aceptada, aunque no inmediatamente, por la totalidad de los pueblos europeos, y es la que se ha impuesto unánimemente en el mundo actual.

Este calendario es «demasiado largo» en 5/10.000 días, es decir, un día cada 2.000 años.

Ha habido tentativas de nueva reforma, buscando no la coincidencia civil y astronómica, la cual ya existe, pero sí la uniformidad de los meses y semanas en el año, pero no han plasmado en realidad.

4. **Calendario lunar.** — Además del calendario basado en el año solar, han existido otros calendarios, basados en los períodos de revolución lunar, que es seguido por mahometanos y judíos, aunque tan sólo en el aspecto religioso.

El año lunar consta de 354 días, repartidos en 12 meses de 29 días, 12 h. 45 m. y 2 s., por lo que se les cuenta de 29 y 30 días.

El ciclo de coincidencia entre el ciclo lunar y el ciclo solar es de 19 años, con 235 lunaciones o meses lunares, con lo que de 235 : 19 = 12 meses por año solar, queda por resto 7 lunaciones, que se distribuyen a lo largo del período.

El ciclo lunar ha dado origen a los meses actuales.

5. Calendario eclesiástico. — El calendario eclesiástico utilizado por la Iglesia Católica es lunisolar, pues para fijar ciertas fiestas llamadas móviles, se tiene en cuenta el ciclo lunar además del solar. Así, la Pascua de Resurrección debe celebrarse, según ordena el Concilio de Nicea, el siguiente domingo al primer novilunio que siga al 21 de Marzo, fecha en que se fija el equinoccio de primavera.

Este calendario designa los días de la primera semana del año con las letras A, B, C, D, E, F y G. Llámase *letra dominical de un año,* la letra que corresponde al primer domingo de dicho año, letra que corresponderá a todos los domingos de ese año.

Se encuentra la letra dominical, calculando el día de la semana en que comienza el año. Así si un año empieza en lunes, puesto que el año contiene 365 : 7 = 52 y tiene un resto de un día, el siguiente comenzará por martes, a menos que sea bisiesto, y entonces comenzará por miércoles.

De esta manera se calculan las letras dominicales de años sucesivos y se tabulan.

Áureo número es el cardinal que ocupa un año determinado en el ciclo de 19 años, que constituye el ciclo lunar. Se llama así porque el calendario lo llevaba marcado en oro.

Epacta, palabra griega, que se emplea para indicar la edad de la luna al comienzo de un año.

Veamos el fundamento del cálculo aproximado. Suponiendo que en un determinado año, el primero de Enero coincide con el comienzo del novilunio, al año siguiente la edad de la Luna o Epacta, al comienzo, será 365 − 354 = 11 días, siendo 1 el número áureo.

Al comienzo del siguiente, la Epacta será: 11 × 2 = 22 días y el áureo el número 2, y así sucesivamente se irá calculando. Pero ha de tenerse en cuenta que el áureo número puede alcanzar a lo más 18 y la edad de la Luna 29 ó 30 días, según el valor del mes lunar que se considere.

PROBLEMAS

1*. Hallar las integrales:

a) $\int x^6\,dx$, *b)* $\int \sqrt{x}\,dx$, *c)* $\int \frac{dx}{x^3}$, *d)* $\int ax^5\,dx$

2*. Hallar las integrales:

a) $\int 5y\,dy$, *b)* $\int \sqrt{2px}\,dx$, *c)* $\int (2x^3-5x^2-3x+4)\,dx$

3*. Hallar las integrales:

a) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$, *b)* $\int s^{-\frac{1}{2}}\,ds$, *c)* $\int \frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt[3]{\alpha}}$, *d)* $\int y^{-m-1}\,dy$

4*. Hallar las integrales:

a) $\int (\sqrt{a}-\sqrt{t})^3\,dt$, *b)* $\int (a^2+b^2x^2)^3\,dx$, *c)* $\int (c+ay^2)^{\frac{1}{2}}y\,dy$

5*. Hallar las integrales:

a) $\int \sqrt{a^2-x^2}x\,dx$, *b)* $\int (3ax^2-9bx)(2ax-3b)\,dx$, *c)* $\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

6*. Hallar las integrales:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, *b)* $\int \cos^5 x \operatorname{sen} x\,dx$, *c)* $\int \operatorname{sen}^3 ax \cos ax\,dx$

7*. Hallar las integrales:

a) $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$, *b)* $\int \frac{2x-1}{2x+3}\,dx$, *c)* $\int \frac{r^2+1}{r-1}\,dr$, *d)* $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(a+b)\cos x}$

8*. Hallar las integrales:

a) $\int \operatorname{sen} 29x\,dx$, *b)* $\int \cos mx\,dx$, *c)* $\int \operatorname{tg} bx\,dx$, *d)* $\int \frac{ds}{\cos^2 s}$

9*. Hallar las integrales:

a) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$, *b)* $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, *c)* $\int \frac{7\,ds}{\sqrt{3-s^2}}$, *d)* $\int \frac{5x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

10*. Hallar las integrales:

a) $\int \operatorname{sen}^4 t \cos^5 t\,dt$, *b)* $\int \cos^3 y \operatorname{sen}^5 y\,dy$, *c)* $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

11*. La velocidad de un cuerpo que parte del estado de reposo es de $5\,t^2$ m/seg. al cabo de t segundos, calcular: *a)* ¿Qué espacio ha recorrido en tres segundos? *b)* ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanzará la distancia de 360 m.?

12*. Suponiendo que $v = 3$ cuando $t = 2$, encontrar la relación existente entre v y t, sabiendo que la aceleración es:

$$a)\ 2, \qquad b)\ 3\,t^2 + 1, \qquad c)\ t^3 - 2\,t \quad \text{y} \quad d)\ \frac{1}{t} + t$$

13*. Un cuerpo parte del origen de coordenadas y al cabo de t segundos, su velocidad paralela al eje de las x es $6\,t$ y la velocidad paralela al eje de las y es $2\,t^2 - 3$. Encontrar: *a)* La distancia recorrida paralelamente a cada eje. *b)* Ecuación de la trayectoria.

14*. Calcular:

$$a)\ \int_0^a (a^2x - x^3)\,dx, \qquad b)\ \int_1^\theta \frac{dx}{x}, \qquad c)\ \int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x+1}, \qquad d)\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$$

15*. Calcular:

$$a)\ \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx, \qquad b)\ \int_0^{2r} \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$c)\ \int_{-b}^{b} \frac{\pi}{a^4}(y^2 - b^2)\,dy, \qquad d)\ \int_0^{\pi/2} (2 - 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta$$

16*. Hállese el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de x y la ordenada en $x = 3$.

17*. Área limitada por $y^2 = 4\,x$ y las ordenadas en $x = 4$ y $x = 9$.

18*. Calcular el trabajo efectuado para llenar de agua, por medio de una bomba, una media esfera de 10 m de radio y por el fondo.

19*. Encontrar por integración la superficie lateral de un tronco de cono de revolución, cuyo eje es el de las abscisas, su altura a, su base mayor, más alejada del origen, corta al eje en $(b, 0)$, su radio mayor es R y una generatriz corta al eje en $(c, 0)$.

* * *

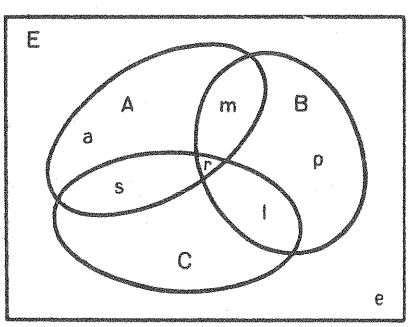


FIG. 1

1. Siendo A y B dos conjuntos que se cortan (figura 1), y E un conjunto que los contiene, demostrar las relaciones siguientes:

$$a)\ (A \cap B) \cup B = B$$

$$b)\ (A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B$$

$$c)\ A \cap (A \cup C) = A$$

$$d)\ A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

siendo $\bar{A}$ el conjunto de elementos de E no pertenecientes a A.

2. Dados los conjuntos A, B y C, que se cortan (figura 1), y están contenidos en E, probar:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$

b) $(\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) = B$

designando como antes

$$\bar{A} = C_E(A) \qquad \bar{B} = C_E(B) \qquad \text{y} \qquad \bar{C} = C_E(C)$$

que se lee: $\bar{A}$ es el conjunto de elementos de E no pertenecientes a A, etc.

3. Demostrar la implicación

$$D \subset A \text{ y } D \subset B \text{ y } D \subset C \implies D \subset (A \cap B \cap C)$$

4. Conocidas las propiedades p y q, de modo que

$$\alpha = p \text{ y } q \qquad\qquad \beta = p \text{ ó } q,$$

expresar las propiedades no α y no β. Aplíquese al caso de que

p = el triángulo T es isósceles; $\qquad$ q = el triángulo T es rectángulo.

5. Definir los conjuntos siguientes por enumeración de sus elementos:

a) $A = \{x \mid x \in N \text{ y } x < 3\}$; $\qquad$ *b)* $B = \{x \mid x \in N \text{ y } x^2 < 18\}$;

c) $C = \{x \mid x \in N \text{ y } x \text{ es par}\}$

6. Siendo $A = \{a_i\}$ y $B = \{b_i\}$, se sabe que $A \times B$ tiene 6 elementos, ¿de cuántos elementos pueden constar A y B?

7. Consideremos las implicaciones

$$\text{no } p \implies q \qquad \text{y} \qquad p \implies \text{no } q$$

siendo p y q propiedades; se pregunta: *a)* ¿Cuáles son las recíprocas de estas implicaciones? *b)* ¿Y las contrarias?

8. Resolver las inecuaciones

$$a) \quad 2x^2 - 3x + 1 < 0 \qquad \text{y} \qquad b) \quad 2x - 1 > 0$$

dando las soluciones en forma de conjuntos y expresar la intersección de ambos conjuntos.

9. Dados los conjuntos

$$A = \{x \mid x \in N \text{ y } 0 \leqq x < 35\}$$
$$B = \{x \mid x \in N \text{ y } 17 \leqq x \leqq 39\}$$

expresar $A \cap B$ y $A \cup B$

10. Si A es un número $A \in N$, tal que $A = cdu$, hallar A sabiendo que

$$3c + d + u = ud + 9$$
$$cdu = cud + 27$$
$$\frac{cdu}{7} \quad \text{y} \quad \frac{udc}{7} \in N$$

11. Consideremos en N la adición $+$ y la ley interna $*$ definida por $a * b = a + 2b$. Se pregunta: 1.º ¿La operación $*$ es distributiva respecto a la suma? 2.º ¿Es distributiva la adición respecto a $*$?

12. Estudiar en N la ley interna

$$a \square b = a^2b^2$$

13. Demostrar que si restamos dos desigualdades de sentido contrario, resulta otra desigualdad del sentido de la tomada por minuendo.

14. Demostrar que, en números naturales, al dividir los dos miembros de una desigualdad por un número, resulta otra desigualdad del mismo sentido que la dada.

15. Demostrar que si en N dividimos miembro a miembro dos desigualdades de sentido contrario, resulta otra desigualdad de sentido de la tomada como dividendo.

16. Si tenemos

$$P_1 = 5\,a^2b - 3\,ab^2 + 4\,b, \qquad P_3 = a^2b + 5\,b + 2\,a - ab^2,$$
$$P_2 = 3\,a^2b + 2\,ab^2 - 4\,b + 2\,a, \qquad P_4 = 2\,a^2 - 5\,b + 3\,a + 7\,a^2b - ab^2,$$

calcúlese $A = P_1 - (P_4 - P_3) - P_2$ y $B = P_2 - [P_3 + (P_4 - P_1)]$

17. En el supuesto de que el número de cabellos de una persona no exceda nunca el cuarto de millón, razónese que en Madrid (2,1000.000 de habitantes), hay, por lo menos, 4 personas con igual número de cabellos.

18. Obtener un número de cuatro cifras significativas de la forma *abab*, tal que, disminuído en la unidad, sea cuadrado perfecto.

19. Probar que son equivalentes los dos enunciados siguientes:

a) *El cociente de una determinada división no cambia cuando se aumenta el divisor en una unidad.*

b) *El resto de la misma división es al menos igual al cociente.*

20. La suma de p números sucesivos es un número dado A. Encontrar esos p números. ¿Es siempre posible el problema? Condiciones de posibilidad. Aplíquese a los ejemplos siguientes

$$p = 3 \quad \text{y} \quad A = 165, \qquad p = 4 \quad \text{y} \quad A = 114$$

21. Hallar los tres números naturales menores posibles, que, divididos por 8, den de resto 2, y divididos por 11, den de resto 9.

22. Cuántos y cuáles son los números enteros de tres cifras que cumplen las condiciones siguientes: La suma de sus cifras es 20 y, dividiéndolos por 2, después de haberles restado 16, dan por resultado el mismo número invertido.

23. Sabiendo que 75 bueyes se han comido en doce días la hierba de un prado de 60 áreas, y que 81 se han comido la de otro prado de 72 áreas en 15 días, se pregunta: ¿Cuántos bueyes serán necesarios para comerse en 18 días la hierba de un prado de 98 áreas? (Se supone que en los tres prados la hierba está a la misma altura, y que continúa creciendo uniformemente).

24. El producto 473×58, en un sistema de numeración de base desconocida, es 31.316. ¿Cuál es esa base?

25. Al dividir 34.703 por 624, expresados en base de numeración desconocida, da en la misma base 44 de cociente y 363 de resto. ¿Cuál es esa base?

26. El número 190, escrito en el sistema decimal, está representado por 276 en un sistema de base desconocida. Hallar esa base.

27. Constrúyase una tabla de sumar en base 2 y otra en base 12.

28. El cuadrado del número $333_{(n}$ es $205.013_{(n}$. Hállese la base.

29. Hallar un número de tres cifras, sabiendo que en los sistemas de base 7 y 9 se escribe con las mismas cifras pero dispuestas en orden inverso.

30. En un número de 6 cifras, la primera de la izquierda es la unidad. Si se lleva esta cifra al primer lugar de la derecha, corriendo un lugar las demás, el número obtenido es el triple del primitivo. Calcular ese número.

31. Calcular en base n, siendo $a = n - 1$ y $b = n - 2$, la raíz cuadrada de

$$N = \overset{p-1}{aa \ldots\ldots} \; ab \; 00 \ldots\ldots \overset{p-1}{01}_{(n}$$

32. Llamando A_p y A_{kp} a dos números en base n formados exclusivamente con la cifra a repetida p veces en el primero, y kp veces en el segundo, hallar el cociente $\frac{A_{kp}}{\quad}$ y luego ponerlo en base n^p.

33. Si $2^m - 1 = pq$, siendo m, p, q, enteros mayores que la unidad, demostrar que $p + 1$ y $q - 1$ escritos en base 2 terminan en igual número de ceros, o lo que es lo mismo, contienen como divisor la misma potencia de 2.

34. Hallar la suma de las V_7^5 que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

35. Determinar el número de P_n, permutaciones de n elementos ($n \leqq 5$) que se pueden formar con 5 elementos, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, de tal modo que todos figuren en cada una de aquéllas, sin que aparezca ninguna inversión.

36. ¿Cuántas palabras pueden formarse con n vocales y n consonantes dadas, de modo que no haya dos vocales ni dos consonantes juntas?

37. Cuatro caballos toman parte en un concurso. ¿De cuántas maneras distintas pueden llegar a la meta?

38. En un circuito, en el que por determinado punto sólo pueden pasar tres coches, se celebra una carrera, en la que toman parte cinco corredores. ¿De cuántas maneras distintas podrán pasar los coches por el citado punto?

39. Diez amigos disponen de un automóvil para trasladarse de A a B. El automóvil es de 6 plazas, sin contar el conductor, y sólamente 7 de esos señores saben conducir. ¿De cuántas maneras pueden organizar un primer viaje?

40. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6? Se supone que las cifras de cada número no se repiten. ¿Cuántos de esos números terminarán en 45? ¿Cuántos tendrán la cifra 2 en el lugar de las decenas?

41. Consideremos tres grupos de cifras: 1, 2, 3, el primero; 4, 5, 6, el segundo, y 7, 8, 9, el tercero. Se desea averiguar cuántos números hay, como el 145.789 y el 364.897, que están formados por seis cifras diferentes, la primera del primer grupo, las dos siguientes del segundo, y las tres últimas del tercero, considerando ese orden.
¿Cuántos números si no se conserva ese orden?

42. Un número formado por $3n$ factores primos, ¿de cuántos modos puede descomponerse en n factores, compuestos cada uno de tres factores primos?

43. Demostrar que la suma de los seis números de dos cifras distintas que se pueden formar con tres cifras diferentes de 0, es igual a 22 veces esa suma de las cifras.

44. Calcular el número de capicúas de una serie de billetes de tranvía desde el 00000 hasta el 99.999 inclusive. Una vez obtenido, hallar la suma de estos capicúas.

45. ¿Cuántos capicúas hay inferiores a 10^6. (Un capicúa es, por ejemplo, el 425.524).

46. ¿De cuántas maneras se pueden alinear p signos $+$ y n signos $-$, de manera que no haya dos signos menos consecutivos?

47. Formar la permutación que ocupe el lugar 340 entre todas las que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6.

48. Calcúlese el número de divisores distintos que tiene el 2.310 y el 5.880; y, por fin, $N = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p \cdot 7^q \cdot 11^r$.

49. Un coronel que manda 3.003 hombres, quiere ordenar sus soldados de modo que formen un triángulo: Un soldado en la primera fila, 2 en la segunda, 3 en la tercera, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas tendrá que formar?

50. ¿Cuántos boletos debería rellenar el que deseara poseer todas las posibilidades para acertar en las quinielas futbolísticas nacionales?

51. Dado un producto de n factores, determinar de cuántas maneras se pueden cambiar los signos de dichos factores, sin que por ello se altere el producto.

52. Dado el número 48.637.251, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar con sus cifras, que tengan el 5 por centenas? ¿Y cuántos si han de tener el 5 por centenas, y el 3 por unidades de mil? ¿Y cuántos números de los que se pueden formar están comprendidos entre 3.000 y 6.000?

53. Supuesto que han sido formadas las variaciones ordinarias de los n elementos $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$, tomados de h en h, determinar el número N_{12}, de dichas variaciones, en las cuales figure el elemento a_1 o el a_2, pero no a_1 y a_2 simultáneamente.

54. Demostrar que:

a) $\dfrac{(2n)!}{n!} = 2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)]$

b) $(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots(4n-3)(4n-1) = \dfrac{(4n)!\,n!}{2n\,[(2n)!]^2}$

55. Se lanzan tres dados al aire, uno es blanco, otro negro y otro rojo. Se pregunta, probabilidad de que salga par en el blanco, múltiplo de 3 en el negro, y mayor que 4 en el rojo, simultáneamente.

56. En una bolsa hay 20 bolas blancas y 30 negras. Si se hacen 4 extracciones seguidas, ¿qué probabilidad habrá de que las 4 bolas sean blancas: 1.º, devolviendo la bola a la bolsa cada vez; 2.º, no devolviéndola?

57. Un señor hace 9 quinielas semanales durante toda la temporada que dura la Liga Española (30 semanas), ¿qué probabilidad tiene de que acierte una vez todos los partidos?

58. Sacando 4 cartas de las 48 que forman la baraja completa, ¿qué probabilidad existe de que salgan dos reyes y dos sotas?

59. En una clase de 36 alumnos se quieren formar dos equipos de fútbol a la vez, ¿qué probabilidad tendrá el alumno Pedro de ser elegido portero, si la elección se hace al azar?

60. Se arrojan por un plano inclinado seis dados, cuyas caras llevan las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, ¿cuál es la probabilidad de que al llegar al suelo formen un número que comience por 34 y termine en 23?

61. La probabilidad de que un soldado, al disparar, haga blanco es $\frac{2}{5}$. ¿Qué probabilidad tendrá al hacer tres disparos seguidos, de que haga blanco solamente con los dos primeros disparos?

62. En una urna hay 20 bolas blancas, 20 negras y 20 azules. Se sacan sucesivamente 7 bolas, devolviéndolas cada vez, ¿qué probabilidad existe de que se saquen igual número de bolas blancas que negras?

63. Se han escrito 6 cartas con sus correspondientes sobres. Un ciego introduce las cartas en los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que todas vayan a parar a su correspondiente sobre?

64. Considerada en Z la ley interna

$$a * b = a + b + ab,$$

a) Estudiar las propiedades de esta ley.
b) ¿Es distributiva respecto a la adición? ¿Y respecto a la multiplicación?
c) ¿Cuáles son los elementos simetrizables?

65. Si $N = a + b\sqrt{2}$ siendo $a \in Z$ y $b \in Z$, demostrar:
a) Que si N es nulo también lo serán a y b.

b) Que si $N = a + b\sqrt{2}$ es igual a $N_1 = a_1 + b_{11}\sqrt{2}$, será $a = a_1$ y $b = b_1$.

c) Si designamos por E el conjunto de los números $N = a + b\sqrt{2}$, probar que la multiplicación es una operación interna en E.
d) Si $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, entonces N se llama número unitario. Demuestra que el producto y cociente de dos números unitarios son números unitarios.

66. Al extraer la raíz cuadrada de un número, se obtiene por resto 2. Si a dicho número se suman 27 unidades, la raíz cuadrada de la suma aumenta en una unidad y el resto, en 4. ¿Cuál es ese número?

67. Dadas las fracciones $\frac{355}{113}$ y $\frac{333}{106}$, averiguar: 1.º ¿Cuál es la mayor? 2.º Si son irreducibles. 3.º ¿Cuál es el menor número entero que es preciso sumar a los dos términos de la mayor, para que la fracción obtenida sea inferior a la menor de aquéllas?

68. El producto de dos números enteros es 675. La suma de la raíz cúbica del cuadrado del primero y de la raíz cuadrada del cubo del segundo es 134. ¿Cuáles son esos números?

69. Demostrar que $p^{n+4} - p^n = \text{múlt. } 30$, si p y n son enteros y positivos.

70. El m. c. d. de dos números es 3. ¿Cuáles son esos números, sabiendo que la serie de cocientes que se obtienen al hallar su m. c. d. es 5, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2?

71. Calcular el divisor y el cociente de una división, sabiendo que el dividendo es 38.794, y los restos sucesivos: 210, 112, 98, 14 y 0.

72. Se sabe que el m. c. d. $(A, 56) = 4$, y que el resto de dividir A por 56 es 36. Hállese A.

73. Demostrar que para $N \neq \text{múlt. } 3$, es $1 + 2^N + 2^{2N} = \text{múlt. } 7$.

74. Tres móviles A, B, C, recorren una circunferencia, en el mismo sentido, respectivamente, en 858, 975 y 1.650 segundos. Si los tres salen al mismo tiempo y del mismo punto, se pregunta: 1.º ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que los tres coincidan en el punto de partida por primera vez? 2.º ¿Ídem para que se encuentren por primera vez y octava vez en un punto cualquiera?

75. Un librero liquida hoy a un editor una partida de libros de dos clases, cuyos precios son, respectivamente, de 23 y 19 pesetas el ejemplar. Después de quedarse con el 20 % de comisión de venta, entrega al editor una letra a 5 meses vista, por lo que le corresponde cobrar hoy, descontando el 6 % (año comercial), la cantidad exacta de 485'16 pesetas. Se pregunta el número de libros de cada clase.

76. Demostrar que si la ley interna $*$ en A es asociativa, se tiene para cuatro de sus elementos

$$[(a * b) * c] * d = a * [b * (c * d)]$$

77. Si en el conjunto B se ha definido una ley interna $*$ que atribuye a B una estructura de grupo abeliano, demostrar: *a)* Que para $\forall\, a \in B$ no existe más que un elemento simétrico. *b)* La ecuación $a * x = b$ no admite más que una solución.

78. Se considera el conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$, en el que se define una ley de composición interna representada por $+$, llamada adición y otra $\times$, denominada multiplicación, según las tablas que siguen

TABLA DE ADICIÓN

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

TABLA DE MULTIPLICACIÓN

	e	a	b	c	d
e	e	e	e	e	e
a	e	a	b	c	d
b	e	b	d	a	c
c	e	c	a	d	b
d	e	d	c	b	a

a) Comprobar que la adición es una ley de grupo abeliano.
b) Que la multiplicación es conmutativa, asociativa y distributiva respecto de la adición.
c) El producto de dos factores puede ser igual a e sin ser ninguno de los factores.

79. Consideremos el conjunto E, dotado de dos operaciones internas, adición $+$ y multiplicación $\times$, las cuales le dotan de una estructura de anillo no conmutativo ($a \times b \neq b \times a$). Se conviene designar por $-a$ el simétrico de a en la adición y se escribe $a - b$ para representar a $+ (-b)$. Se introduce una nueva ley $*$ definida por

$$a * b = a \times b - b \times a$$

a) Demostrar que $*$ es distributiva respecto a la suma. *b)* Que es autoconmutativa, es decir, que $a * b = -(b * a)$. *c)* Que si 0 es el elemento neutro de la adición, se tiene:

$$a * (b * c) + b * (c * a) + c * (a * b) = 0$$
$$a * (b * c) - (a * b) * c = (c * a) * b$$

80. El cociente de la división entera (no exacta) de $(a-1)$ por $b > 1$, es q. ¿Qué cociente obtendremos al dividir $ab^n - 1$ por b^{n+1}?

81. La división en Z de a por b, da q de cociente y r de resto.
a) ¿Qué cociente y resto se obtendrá al dividir $a + x$ por b?
b) ¿Qué valor ha de tomar x para que el cociente no varíe?
c) ¿Qué valor podremos restar a a para que no varíe tampoco el cociente?

82. Se tienen los números tales que $415 \equiv 325\ (m)$; hallar m.

83. ¿Existe algún cero en la tabla de multiplicar en clases residuales mód. 5 y en la de mód. 6? Generalícese.

84. ¿Es uniforme la división en las clases residuales? Examínese mediante tablas y generalícese.

85. Escríbase el menor conjunto representativo de las clases residuales respecto de 23, formado por números mayores que 18.

86. Sean a y $b \in Z$ y menores que $p \in Z$. Sea, igualmente,

$$a + (p) + b + (p) = c + (p)$$

a) Determinar $c + (p)$ en el caso de que $b + (p) = 0 + (p)$ y $b + (p) = (a-p) + (p)$.
b) Probar que la suma proporciona al conjunto E de las clases residuales una estructura de grupo abeliano.
c) Si a y $b \in Z$, probar que existe un sólo número

$$d < p, \quad \text{tal que} \quad a + (p) = b + (p) + d + (p)$$

d) Siendo A, B y p números enteros dados, resolver la ecuación $x + A \equiv B\,(p)$.
Aplicarlo al caso $x + 14 \equiv 21$ (mód. 5).

87. Calcular el resto de 3.861^{3000} con respecto a 7.

88. Hállese el resto de $437^{75} \times 7.984^{68}$ mód. 6.

89. Los restos potenciales de 3.663 módulo 13, ¿qué sucesión forman?

90. Hallar los números que divididos por 2, 3, 4, 5 y 6, den por restos respectivamente 1, 2, 3, 4 y 5.

91. Sean n, $n + 1$, dos números consecutivos y $2n + 1$ su suma. Probar:
a) Que uno solo de los tres es múltiplo de 3. *b)* Que el producto $P(n) = n(n-1)(2n-1)$ es múltiplo de 6, y la diferencia con el producto $p(n-1)$ es igual a $6n^2$. *c)* Encontrar una regla para calcular la suma S_2, de los cuadrados de los n primeros números enteros.

92. Suponiendo que $A = 2n + 1$ es un número primo, los restos de dividir $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ por A, son todos distintos. Demuéstralo.

93. La suma y diferencia de dos números primos entre sí, son primas con el producto. Demuéstralo.

94. Si $p > 3$ es primo, los números 2, 3, 4, ..., $(p-2)$ se distribuye en parejas, r y s, de modo que $r \neq s$ y tales que $rs \equiv 1\,(p)$.

95. Se sabe que el número A, al ser dividido por 11, 7, 5 y 3 da respectivamente por restos r_{11}, r_7, r_5 y r_3, de modo que

$$3.019 = 210\,r_{11} + 330\,r_7 + 231\,r_5 + 385\,r_3$$

hállese el número A.

96. Hállese una regla de divisibilidad por 13.

97. Hállese la regla de divisibilidad por 5 en el sistema de base 7.

98. Si dos números enteros, p y q, son primos entre sí, su suma y diferencia son primas con el producto pq. Demuéstrese.

99. Dividiendo 633, 415 y 748 por $d \in N$ se obtienen los siguientes respectivos restos 3, 1 y 4. Calcular d.

100. Resolver las ecuaciones siguientes en Z:

$7x - 5y = 4$ $\qquad$ $15x - 2y = 9$ $\qquad$ $ax \equiv 0\,(p)$
$12x \equiv 0\,(7)$ $\qquad$ $12x \equiv 5\,(8)$ $\qquad$ $ax \equiv b\,(p)$

101. Dos satélites artificiales de órbitas ecuatoriales pasan por el zenit de A el primero cada 3 h. 20^m y el segundo cada 4 h. 10^m. ¿Cuál es el menor intervalo de tiempo que separan dos pasos simultáneos por el zenit de A?

102. Demostrar que si los tres números a, b, c son tales que m. c. d. $(a, b, c) = 1$, pero no son primos dos a dos, se tiene:
a) m. c. d. (ab, bc, ca) = m. c. d. $(a, b) \times$ m. c. d. $(b, c) \times$ m. c. d. (c, a).

103. Se quiere saber cuántos números tienen 5.400 divisores de la forma $2^{\alpha}\ 3^{\beta}$, siendo $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Escríbanse tres de esos números.

104. Siendo a y $b \in Z$ determinar k, de modo que

$$k \times \text{m. c. d. } (a, b) = \text{m. c. d. } (ka, b)$$

105. Siendo a, b, m y $n \in Z$, probar que

$$\text{m. c. d. } (a, b) = \text{m. c. d. } [a+bm,\ a+b\,(m-1)]$$

106. Calcular el m. c. d. $(a, 2a+1)$, m. c. d. $(2a+1, 3a+1)$ y m. c. d. $(5a+7, 3a+5)$.

107. Si N es un número compuesto, ¿de cuántas maneras se puede descomponer en un producto de dos factores primos entre sí?

108. Demostrar que $N = du$ será divisible: *a)* Por 13 si y solamente si $d + 4u$ lo es. *b)* Demostrar igualmente que será divisible por 31 si y solamente si lo es $d - 3u$.

109. Si se divide la circunferencia en n arcos iguales, y se unen de p en p los puntos de división, ¿qué clase de polígonos resultan?; ¿por qué?

110. Hallar el menor múltiplo común de 72 y 150 que tenga cinco cifras.

111. Supongamos la serie ilimitada de números 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., en la que cada uno es igual a la suma de los dos precedentes. Probar que cada dos números consecutivos son primos entre sí.

112. ¿En cuántos ceros termina el producto $15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot \ldots 30$?

113. Demostrar que si el número abc es divisible por 21, también lo es $a - 2b + 4c$.

114. Siendo $a, b, a', b' \in Z$, que satisfacen a la condición de que $ab' - a'b = 1$, y m y n dos números enteros cualesquiera. Demostrar que

$$\text{m. c. d. } (m, n) = \text{m. c. d. } (am+bn,\ a'm+b'n)$$

115. ¿Cuál es el menor número natural que dividido por 5, 6 y 7 da sucesivamente por restos 4, 5 y 6?

116. Demostrar que: *a)* $n(n+1)(2n+1)$ es divisible por 6 si $n \in Z$. *b)* $a^2b^2(a^2+b^2) \cdot (a^2-b^2)$ es divisible por 30, siendo $a, b \in Z$. *c)* Que el producto de tres números pares consecutivos es divisible por 48.

117. Efectuar las siguientes operaciones y hallar el cociente y resto.

$$\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$$

118. Calcular el valor de

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \text{ para } x = \frac{2ab}{b^2+1}$$

119. Para efectuar cierto trabajo, un equipo de 3 obreros emplea a días, y otro equipo de 9 obreros emplea b días. Un equipo mixto, formado por 2 obreros del primer grupo y 3 del segundo, tarda en efectuar el trabajo 3 días. Calcular a y b, sabiendo que $a - b = 2$.

120. En un tonel de 600 litros se ha echado, primeramente, vino de 240 pesetas el Hl., hasta los 3/5 de su capacidad; inmediatamente se ha llenado los 2/3 del resto con vino de 210 pesetas el Hl., y se ha terminado de llenar el tonel con agua. ¿A qué precio debe venderse el doble decalitro de la mezcla, para ganar el 18 % del valor de venta?

121. Los 5 términos de una progresión aritmética suman 45 y sus recíprocos $\frac{137}{180}$. Escribir la progresión.

122. De un depósito de 100 litros de capacidad, lleno de alcohol puro, se saca una cierta cantidad de alcohol y se reemplaza por agua. Se saca después la misma cantidad de mezcla y se reemplaza por agua, quedando esta última mezcla con $\frac{49}{100}$ de alcohol. Determinar la cantidad de líquido que se ha sacado cada vez.

123. Un raposo, perseguido por un galgo, se encuentra a 50 de sus saltos de éste. El raposo da 4 saltos mientras el galgo da 3. Pero cada dos saltos del galgo equivalen a 3 del raposo. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar al raposo? ¿Cuántos saltos habrá dado el raposo hasta ser alcanzado?

124. Calcular el valor de la expresión

$$E = \frac{4a}{a+b} \cdot \frac{\sqrt{3025\,(1+x^2)}}{x+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{siendo} \quad x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

125. Un reloj marca las 3 horas y cuarto. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el segundero se coloque en la bisectriz del ángulo formado por el horario y el minutero, por primera vez, por segunda vez? Hállese igualmente la fórmula que nos dé la enésima vez que se repite el caso.

126. Simplificar la expresión:

$$E = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

127. El determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & 9 \\ 8 & 0 & -1 & 7 \\ -6 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

es nulo. ¿Por qué?

128. Redúzcase el determinante anterior a otro equivalente de tercer orden.

129. Desarróllese por la segunda columna:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 \\ 7 & 9 & 2 & 11 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

130. Transformar el determinante

$$\begin{vmatrix} 13 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 8 & 2 \\ -6 & 3 & -10 & 7 \end{vmatrix}$$

en otro equivalente que tenga la tercera columna formada exclusivamente por elementos iguales a la unidad.

131. Calcular el determinante de tercer orden definido por el producto

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & -10 & 15 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

132. Escribir un determinante de tercer orden cuyos elementos sean todos números enteros equivalentes al cociente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & -10 & 15 & 10 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

133. Desarrollar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & 0 & \dots 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots 0 \end{vmatrix}$$

que tiene nulos todos los elementos de un lado de la diagonal secundaria

134. Demostrar que el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -a_2 & a_3 & a_4 & -a_5 \\ a_2 & 0 & -b_3 & b_4 & b_5 \\ -a_3 & b_3 & 0 & -c_4 & -c_5 \\ -a_4 & -b_4 & c_4 & 0 & d_5 \\ a_5 & -b_5 & c_5 & -d_5 & -0 \end{vmatrix}$$

es nulo, sin desarrollarlo.

135. Reducir a un solo determinante la suma

$$\Delta = K \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix} - K' \begin{vmatrix} p & q & r \\ a' & b' & c' \\ l & m & n \end{vmatrix} + K'' \begin{vmatrix} p & q & r \\ l & m & n \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

136. Hallar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

siendo a_1, b_1, c_1 y d_1 el valor de las raíces de la ecuación $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$, puestas en orden decreciente de magnitud; a_2, b_2, c_2 y d_2 los coeficientes de los cuatro últimos términos del desarrollo $(a+b)^7$ puestos en orden decreciente; a_3, b_3, c_3 y d_3 los cuatro números primos inmediatamente superiores a 21 y puestos en orden decreciente y $a_4 = b_4 = 0$, $c_4 = -1$, $d_4 = 1$.

137. Determinar a y b para que

$$\begin{aligned} x - ay + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ bx - 2y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

sea compatible y luego resolverlo.

138. Estudiar la compatibilidad del sistema y hallar las soluciones

$$\begin{aligned} x - y + z - 3t &= 4 \\ 4x + 3y - z + t &= 0 \\ 5x + 2y + z - 2t &= 6 \end{aligned}$$

139. Determinar m para que el sistema sea compatible y determinado, y resolverlo después.

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 6 \\ x - y + z &= 0 \\ 3x + my - z &= 3 \end{aligned}$$

140. Discutir el sistema para los distintos valores de a.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

141. Resolver el sistema siguiente aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 4 &= 0 \\ 5x + 2y - 3z + 2u &= 15 \\ x - 2y + z - u &= 6 \\ 3x - u &= 5 \end{aligned}$$

142. De los tres sistemas de ecuaciones siguientes hay uno determinado, otro indeterminado y otro compatible. Compruébese.

$$\begin{aligned} 8x + y + 4z &= 9 \\ 5x - 2y + 4z &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - 4y &= 5 \\ 7x - y - 3z &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x - y - 3z &= 8 \\ -6x + 8y &= -10 \\ 2x - 5y - z &= 4 \end{aligned}$$

143. Determinar el valor de a para que el sistema sea compatible,

$$\begin{aligned} ax + y + z + u &= 2 \\ x + y + z - u &= -1 \\ x + y - az &= -3 \\ (2a+1)x + y + z &= -5 \end{aligned}$$

144. Se tienen tres aleaciones de oro, plata y cobre, compuestas de la siguiente forma:

1.ª aleación: 34 % de oro, 26 % de plata y 40 % de cobre.
2.ª aleación: 18 % de oro, 64 % de plata y 18 % de cobre.
3.ª aleación: 56 % de oro, 15 % de plata y 29 % de cobre.

Determinar los gramos que se han de tomar de cada una de ellas para obtener 20 gramos de una nueva aleación que contenga 29'8 % de oro, 40'1 % de plata y 30'1 % de cobre.

145. Resolver:

$$\begin{aligned} x + y + z - 2u &= 9 \\ x + 2y - z + u &= 12 \\ x + 3y + 5z - 8u &= 7 \\ x + y + 3z - 5u &= 7 \end{aligned}$$

146. Resolver:

$$\begin{aligned} 2x - y + z - t &= 0 \\ 2y - z - t &= 0 \\ 4x + z - 3t &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

147. Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x + y - 5z + u &= 0 \\ x + y + 2z - u &= 0 \\ 3x - 2y - 4z - 2u &= 0 \end{aligned}$$

148. Determinar el valor de a para que el sistema sea compatible y resolverlo con relación a su valor:

$$\begin{aligned} ax + 3y + 4z &= 53 \\ 3x + 5y - 4z &= a \\ 4x + 7y - 2z &= 35 \\ x + y + z &= 16 \end{aligned}$$

149. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a + b + c \\ ax + by + cz &= a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= a^3 + b^3 + c^2 \end{aligned}$$

150. Discutir los valores que deben tomar a y b para que sea compatible el sistema,

$$\begin{aligned} x + y &= 2a \\ x - y &= 2b \\ 2x + 3y &= a + 2b \\ 3x + 4y &= 2a + 3b - 1 \end{aligned}$$

151. Una persona compró objetos de 7 y 8 pesetas, gastando en la compra 257 pesetas. Se sabe además que el número de objetos de 8 pesetas comprados es menor que 10. ¿Cuántos objetos compró?

152. Determinar los números enteros de tres cifras en los que la intermedia es 9 y además cada número vale 37 veces la suma de sus cifras.

153. Un niño dispone de discos cuyos respectivos diámetros miden 25 mm. y 27 mm., que los coloca en fila. Número de discos de una y otra clase que puede tomar para formar un metro.

154. Un tabernero vende dos clases de vino, a 7 ptas. y a 10 ptas. litro. Si ha obtenido 500 pesetas de la venta, ¿cuántos litros de cada clase de vino ha vendido, si no vende más que por litro?

155. Dos negociantes en vinos entran en una ciudad llevando 53 barriles el primero y 31 el segundo. Como no tienen dinero para pagar el impuesto entregan 3 barriles el primero y 2 el segundo para el pago de ambos y les devuelven en total 35 pesetas. ¿Cuál es el impuesto y el precio del barril?

156. En una fábrica trabajan aprendices, oficiales y especialistas, cuyos jornales son respectivamente 30, 60 y 135 pesetas diarias. La nómina semanal (7 días) importa 42.945 pesetas. Se sabe que el número de oficiales es igual al de aprendices y especialistas juntos. Hállese el número de cada clase.

157. Hallar las soluciones enteras y positivas que verifican la ecuación

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13} = 0'\overline{946053}$$

158. Demostrar que el polinomio $f(x) = x^3 + 3abx + a^3 - b^3$ es divisible por $x+a-b$, sin efectuar la división, y resolver la ecuación $f(x) = 0$.

159. Efectuar la división:

$$[y(y-1)x^4-(y-1)x^3+(2y-3)x^2+xy^3+y^4-1] : [y^2x^2-(y+1)x+2y-1],$$

ordenándola: *a)* respecto a x, y *b)* respecto a y.

160. Hallar el resto y cociente directamente, sin efectuar la división, de

$$(3m^5-2m^4+3m^3-2m^2-m-1) : (m-2)$$

161. Un alumno de Matemáticas, al buscar las raíces del polinomio entero $f(x) = 0$, prueba los valores $x = 1$, $x = 3$, $x = 2$, y observa que ninguno de ellos le satisface, pues con el primero resulta que $f(x)$ toma el valor de 5, con el segundo el de 1, y con el tercero el de $\frac{1}{2}$. Se desea conocer el resto que dará $f(x)$ al ser dividido por el producto $(x-1)(x-3)(x-2)$.

162. Calcular el resto de dividir por $(x-4)$ un polinomio de octavo grado tal que las raíces de la ecuación que resulta al igualarlo a cero son: -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7 y además el resto de dividirlo por $x - 2$ es 700.

163. Se tiene una ecuación $f(x) = 0$ entera, de la que se sabe: 1.º Que dividida por $5x^2 - 4x - 1$ da de resto 7, y en cambio, dividida por $x - 2$, se obtiene el resto 2. 2.º Que si la dividimos por $(5x^2-4x-1)(x-2)$, el cociente es $x^5 - x + 1$. Se desea saber cuál es el polinomio $f(x)$ y qué resto se obtiene en la división indicada en el último apartado.

164. Un polinomio $f(x)$ entero, al ser dividido sucesivamente por $(x+2)$, $(x-2)$ y $(x-3)$, se obtiene por resto respectivamente 1, 2 y 3 y al ser dividido por $(x+2)(x-2)(x-3)$, el cociente es $3x^2 - x + 8$ y su resto desconocido. Escribe el polinomio.

165. Hallar qué valor ha de darse a m, para que al dividir

$$ax^4 - 2bmx^3 + 3amx^2 - bx - am \quad \text{por} \quad x - a,$$

dé de resto $\quad 2a^5\left(1-\frac{b}{3}\right) - a\left(b+\frac{a^2}{3}\right)$

166. Demuestra que en la división exacta el cociente no varía al cambiar la letra ordenatriz, mientras que en la inexacta puede modificarse el cociente con el cambio de la letra ordenatriz.

167. Halla la condición para que un polinomio completo de cuarto grado en x, que se anula para $x = a$, se anule también para $x = \frac{1}{a}$ y aplica esa condición a los polinomios,

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x - 6 \qquad 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6;$$

168. Demostrar que si p es compuesto, también lo es $2^p - 1$.

169. Descomponer en factores la expresión:

$$P = (b^2c^2-a^2d^2)(b-c)(a-d) + (c^2a^2+b^2d^2)(c-a)(b-d) + (a^2b^2+c^2d^2)(a-d)$$

170. Demostrar que si n es impar, $3^{3n} + 3^{2n} + 3^n + 1$ es divisible por 40.

171. Hallar el máximo común divisor de los polinomios,

$$P(x) = x^8 + 7x^7 + 22x^6 - 16x^5 - 31x^4 + 56x^3 - 8x^2 + 32x + 16$$
$$Q(x) = 8x^7 - 56x^6 + 132x^5 - 80x^4 - 124x^3 + 168x^2 - 16x - 32$$

y de

$$A(xyz) = xy^3z^2 + y^3z^2 + xy^4 - xyz^2 + y^4 - xy^2 - yz^2 - y^2$$
$$B(xyz) = x^2y^2z^2 + x^2y^3 + xy^2z^2 - 2x^2yz^2 + xy^3 - 2x^2y^2 - 2xyz^2 + x^2z^2 - 2xy^2 + x^2y + xz^2 + xy$$

172. Demostrar que si p y q son dos números naturales primos entre sí y n otro número natural cualquiera, los polinomios

$$P_1(x) = x^{n(p-1)} + x^{n(p-2)} + \ldots + x^n + 1$$

y

$$P_2(x) = x^{n(q-1)} + x^{n(q-2)} + x^{n(q-3)} + \ldots + x^n + 1$$

son primos entre sí.

173. Determinar a, b, c, m, n, p, de modo que $y = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ sea: para $x = 2$, $y = 0$; para $x = 1$, $y = \infty$; para $x = -1$, y de la forma $\dfrac{0}{0}$; pero su verdadero valor es $y = -6$, y que para $x = 3$ y $x = 4$, los valores que toma y son inversos el uno del otro.

174. Dividir $3x^2 - 2x^4 + x^5 - x^3 - 2x + K$ por $x^3 - 5 - 4x$ y determinar K para que la división sea exacta.

175. Aplicar la regla de Ruffini a $(25x^6 - x^4 - 2x^3 - 8x^2) : (5x^3 - 4x^2)$.

176. Halla el m. c. d. de $3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 2y^3$ y de $4x^2 - 7xy + 3y^2$.

177. Determinar a, b, c, en $ax^4 + bx^3 + c$, sabiendo que son enteros y que el producto de los restos obtenidos al dividir por $x^2 + 1$ y por $x^3 + 1$, es $2(x-1)(x-5)$.

178. Un fenómeno aleatorio viene representado por los siguientes valores y efectivos:

$$x = 7,\ 6,\ 9,\ 4,\ 12$$
$$y = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$$

Calcúlese las medias aritmética y geométrica, mediana, moda y desviación media.

179. Sea la curva $y = \dfrac{6x - 12}{5x^2 + 4}$, considérense los valores de ordenadas correspondientes a $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Hállese la desviación típica de los valores de ordenadas. *b)* Consideradas las parejas de valores (x, y) como representantes de un fenómeno aleatorio, dibújense las rectas de regresión. *c)* Hállese igualmente los máximos y mínimos y dibújese la curva, indicando cuántos puntos de inflexión ha de tener.

180. Dada la función lineal $y = 2x - 3$, tomemos los puntos cuyas abscisas son $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Calculemos: *a)* La varianza. *b)* Las rectas de regresión. *c)* El coeficiente de correlación. *d)* Interprétense los resultados.

181. A la vista de la producción de antracita en relación con el número de obreros empleados en su extracción en España, hállese: *a)* Las medias aritméticas. *b)* Las desviaciones típicas. *c)* Los coeficientes de las rectas de regresión.

Años	*Obreros*	*Toneladas*
1958	17.684	3'12 millones
1959	17.497	2'62 »
1960	16.920	2'514 »
1961	16.294	2'596 »
1962	16.478	2'642 »

182. Hallar las rectas de regresión entre los precios al por mayor x y al por menor y, de los artículos que se citan:

Artículos	x	y
Arroz, Kg.	7	11
Merluza, Kg.	60	85
Ternera, Kg.	52	86
Jamón York, Kg.	80	120
Turrón, Kg.	60	110
Anchoas, lata	8	12

183. Observadas las puntuaciones de Literatura y Matemáticas de un grupo de alumnos, se obtiene:

Puntos	*Núm. alumnos Literatura*	*Núm. alumnos Matemáticas*
Entre 1 y 2	1	3
» 3 y 4	16	27
» 5 y 6	41	31
» 7 y 8	5	4
» 9 y 10	2	0

Calcúlese el coeficiente de correlación de la aptitud de ese grupo de muchachos para la Literatura y para las Matemáticas.

184. Tomados los datos de 180 jóvenes, se han obtenido las siguientes tallas y pesos: (Para facilitar el cálculo, cada intervalo de pesos y tallas (Clases) se reemplaza por una media llamada marca, encerrada en paréntesis).

Pesos Kg.	*Tallas cm.*	145-155 (150)	155-165 (160)	165-175 (170)	175-185 (180)	185-195 (190)	y_i
(50)	45-55	8	3	2	2	0	15
(60)	55-65	16	8	5	3	3	35
(70)	65-75	15	17	8	7	8	55
(80)	75-85	6	12	12	14	16	60
(90)	85-95	1	2	4	3	5	15
	x_i	46	42	31	29	32	180

Hállese: *a)* Las medias aritméticas de pesos y tallas. *b)* Las varianzas. *c)* Las rectas de regresión. *d)* El coeficiente de correlación.

185. Se dan dos rectas no paralelas r y r', y un vector $\vec{V}$. Encontrar un punto P sobre r, y un punto P' sobre r' tales que:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{V}$$

186. Resolver el mismo problema cuando se sustituyen r y r' por dos circunferencias C y C'.

187. Se considera una recta fija r, y, sobre esta recta, un punto fijo A y un punto variable M. Sea P un punto tal que el triángulo APM sea isósceles, es decir: $PA = PM$. Se supone que M y P varían de forma que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo AMP sea constante e igual a una longitud dada R. Encontrar:

1.º El lugar geométrico del centro O de la circunferencia circunscrita.

2.º Deducir el lugar geométrico del vértice P y del ortocentro H del triángulo.

188. Dada una circunferencia de radio R, se consideran las cuerdas $\overline{AB} = R$ fija y $\overline{AC}$ variable. Sobre estas dos cuerdas, como lados, se construye el paralelogramo $ABDC$. Se pide el lugar geométrico del vértice D.

189. Construir un paralelogramo $ABCD$, dada la dirección y longitud MN de los lados opuestos AB y CD, y sabiendo que los otros dos lados AD y BC son cuerdas de dos circunferencias dadas.

190. Construir un triángulo ABC, conociendo sus tres medianas.

191. Construir un cuadrilátero, conociendo las dos diagonales, el ángulo que forman y dos lados opuestos.

192. Situar un segmento de longitud dada paralelamente a una recta dada, y cuyos extremos estén sobre dos circunferencias dadas.

193. Dadas dos circunferencias C y C', y una recta r, determinar los segmentos que tengan sus extremos, uno sobre C y otro sobre C', y tal que r sea su mediatriz.

194. Construir un paralelogramo conociendo dos vértices consecutivos y de modo que los otros dos vértices estén sobre dos rectas a y b dadas.

195. Construir un triángulo equilátero que tenga un vértice en el punto A, otro sobre la recta r, y el otro sobre una circunferencia C. Discusión.

196. Construir un triángulo equilátero tal, que tenga un vértice en cada una de tres circunferencias dadas.

197. Construir un cuadrado tal, que tenga un vértice C sobre un punto dado, y los dos vértices consecutivos al C, sobre dos rectas dadas.

198. Construir un triángulo equilátero que tenga un vértice sobre cada una de tres circunferencias dadas.

199. En un paralelogramo dado, inscribir un triángulo isósceles de ángulo A dado, y tal que éste coincida con un vértice dado del paralelogramo.

200. Inscribir en un paralelogramo dado un rectángulo cuyas diagonales formen un ángulo lado.

201. Dadas dos rectas r y r', y un punto O, pertenecientes a un plano, construir un triángulo rectángulo isósceles de vértice O, cuyos lados iguales sean OA y OB, y además que el vértice A esté sobre r, y el B sobre r'.

202. Dado un círculo C de centro O, y dos puntos fijos, A y B, de un plano, construir los puntos M y M' de C, tales que el ángulo MOM' sea recto, y que las rectas AM y BM' sean paralelas.

203. Sean (F) y (F') dos figuras iguales, y A, A' dos puntos homólogos. A una recta r que pasa por A corresponde una recta homóloga r' que pasa por A'. Hallar el lugar geométrico del punto común a r y r' cuando r gira alrededor de A.

204. Hallar el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman una en otra dos circunferencias dadas.

205. Construir un cuadrilátero conociendo sus cuatro lados y sabiendo que una de las diagonales es bisectriz de uno de los ángulos.

206. Construir un triángulo conociendo a y b, y $A - B$.

207. Construir un triángulo conociendo a, h_a y $\hat{B} - \hat{C}$.

208. Construir un cuadrilátero circunscriptible, conociendo AD, AB, áng. D y áng. B.

209. En una circunferencia dada, inscribir un cuadrilátero $ABCD$ conociendo la magnitud de dos lados opuestos AB y CD, y la relación entre los otros dos lados.

210. Sea ABC un triángulo de ortocentro H. La altura AH corta a BC en A' y a la circunferencia circunscrita de centro O en A''. Sea A_1 el punto medio de BC, y r la paralela por O al lado BC. Demostrar:

1.° Que H es el transformado de A por el producto de dos simetrías de ejes r y BC, y que se cumple:

$$\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA_1}$$

2.° La mediana AA_1 corta a OH en un punto G. Probar que G es el centro de gravedad del triángulo y que se tiene

$$\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$$

211. Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 y un punto en cada una de ellas, A_1 y A_2, hallar:
1.° Un giro que transforme C_2 en otra circunferencia tangente exteriormente en A_1 a C_1.
2.° Ídem, pero con la condición de que el transformado de A_2 sea precisamente A_1, coincidiendo en el punto de tangencia.

212. Hallar el lugar geométrico de los centros de giro que transforman una circunferencia C_2 en otra tangente a una tercera en uno de sus puntos A.

213. Dados dos triángulos iguales y de sentido contrario, determinar un giro y una simetría, cuyo producto transforme uno en otro los triángulos.

214. Dadas las posiciones de dos bolas A y B, en una mesa de billar, determinar el camino que ha de seguir A para que por dos bandas determinadas toque a B. ¿Cuántas soluciones hay?

215. Una bola de billar parte de una banda y tocando las otras tres vuelve al mismo punto de partida: *a)* Dibújese el camino seguido por la bola. *b)* ¿Cuándo será máxima el área del cuadrilátero descrito por la bola?

216. Dados un triángulo ABC rectángulo en A, un punto P y una recta r, hallar el movimiento que transforma el triángulo en otro inversamente igual y que tenga el vértice A en el punto P y B en la recta y ésta no corte al triángulo.

217. Todo movimiento inverso en el plano puede reducirse al producto de infinitos modos: *a)* De una traslación por una simetría axial. *b)* A una simetría central por una simetría axial. (Realícese la demostración con triángulos).

218. El producto de tres simetrías axiales de ejes concurrentes en el plano es otra simetría axial concurrente con aquéllas.

219. Demostrar la igualdad siguiente con el producto de las simetrías axiales concurrentes en el plano, $(Se_1Se_2Se_3)^2 = 1$, es decir, la identidad.

220. Si G_α es un giro de centro O y S_e una simetría de eje e, que pasa por O, se verifica en el plano

$$S_e G_\alpha S_e = G - \alpha$$

221. Producto de una simetría central por una traslación en el plano. Ídem de una traslación por una simetría. Ídem de tres simetrías centrales.

222. Demostrar que si $a = nb = bn$, siendo $n \in N$ y a, b y p segmentos, se verifica que $ap = n\,(bp)$.

223. Demostrar que si p y $q \in N$ y a, b y n son segmentos, si $a = \frac{p}{q} \cdot b = b \cdot \frac{p}{q}$, resulta $an = \frac{p}{q} \cdot (bn)$.

224. Suponiendo $\alpha \in R$ y es positivo y definido por las sucesiones monótonas convergentes,

$$\left.\begin{array}{l} p_1 < p_2 < p_3 < \dots \\ p'_1 > p'_2 > p'_3 > \dots \end{array}\right\}$$

y se verifica que $a = b\alpha = \alpha b$, si a, b y n son segmentos, demostrar que

$$(\alpha b)\, n = \alpha\, (bn)$$

225. Demostrar que si α y β son las medidas de los segmentos a y b respecto a la misma unidad u, se verifica que la medida del segmento ab es $\alpha\beta$.

226. Comprobar que $(ABC) = 1$, equivale a $B \equiv C$.

227. Comprobar que si M y N son los puntos en que las dos bisectrices, interior y exterior correspondientes al vértice C, de un triángulo ABC, corta al lado opuesto AB, se verifica que

$$(MAB) = -\,(NAB)$$

228. Dividir un arco en dos partes, de forma que las cuerdas estén en una razón dada.

229. En un triángulo ABC, una recta variable y paralela a BC corta a los otros lados BA y CA en B' y C'. Hallar el lugar geométrico de la intersección de BB' y CC'.

230. Inscribir un cuadrado en un triángulo ABC, de modo que un lado del cuadrado esté sobre BC.

231. Una circunferencia c, variable, es tangente exterior a dos circunferencias fijas c' y c'', tangentes exteriores en un punto A. Encontrar el lugar de la proyección ortogonal de A sobre la recta que une los puntos de encuentro de las dos tangentes comunes exteriores a c, c' y a c, c''.

232. Reducir la construcción de una circunferencia tangente a una recta dada y que pasa por dos puntos dados a la de una circunferencia tangente a dos rectas, y que pasa por un punto dado.

233. Inscribir en una circunferencia un cuadrilátero semejante a uno dado, de modo que dos vértices están sobre el diámetro, y los otros dos sobre la circunferencia.

234. Dadas tres paralelas, distante la del medio de una y de otra, respectivamente, 1 y 2 cm, construir gráficamente un triángulo equilátero, de modo que cada vértice esté en una de las paralelas, y hallar el valor numérico del lado.

235. Inscribir un rombo en un triángulo dado, de forma que ambas figuras tengan un ángulo común.

236. Determinar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que pasan por un punto fijo.

237. Construir un triángulo del que se conocen dos ángulos y la mediana relativa al tercero.

238. Construir un triángulo conocidos dos lados, a y b, y la bisectriz que concurre con ellos, v_c.

239. Por un punto P interior a una circunferencia c, trazar una cuerda que quede dividida por el punto según la relación dada $\frac{m}{n}$.

240. Trazar por un punto P una secante a dos rectas dadas a, b, de tal modo que las distancias de los puntos X e Y de intersección a dos puntos dados A y B, respectivamente, situados en dichas rectas, estén en una razón dada k, es decir: $AX : BY = k$.

241. Trazar por un punto P no situado en los lados de un ángulo ab, una recta que determine con éstos un triángulo de área dada.

242. Demostrar que si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y dos ángulos suplementarios, los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales a los lados que se oponen a los ángulos suplementarios.

243. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante. Aprovéchese de las propiedades de las bisectrices de un triángulo.

244. Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo los cuatro lados.

245. Construir un triángulo conociendo A, a y $b : c$.

246. Se da un ángulo en el centro AOB de una circunferencia; trazar una tangente que quede dividida, según una relación dada por el punto de contacto y los lados del ángulo.

247. En un triángulo dado ABC, inscribir otro triángulo $A'B'C'$, de manera que sus lados sean paralelos a rectas dadas.

248. Demostrar que los pies de las perpendiculares desde un punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC a los lados del mismo, están alineados (Recta de Simson).

249. Demostrar que las alturas de un triángulo concurren en un punto.

250. Demostrar que las bisectrices de un triángulo concurren en un punto.

251. Determinar las coordenadas de los puntos que dividen en cuatro partes iguales el segmento AB, siendo $A\,(-1)$, $B\,(5)$.

252. Determinar h con la condición de que el par de puntos x_1 y x_2, definidos por $x^2 - 6x + 5 = 0$ y los de la ecuación $x^2 - 11x + h = 0$, satisfagan la relación

$$\frac{(x_1 x_3 x_4)}{(x_1 x_3 x_4)} = -1$$

253. Determinar dos puntos P y P', simétricos respecto del $U\,(1)$, y tales que sea $\dfrac{(APP')}{(BPP')} = \dfrac{1}{6}$, siendo $A\,(0)$, $B\,(7)$.

254. Dadas dos circunferencias C y C', su eje radical r y una circunferencia C'' simétrica de C' con relación a r, demostrar:

1.º Que r es el eje radical de C y C''.

2.º Que el eje radical está más cerca de la circunferencia mayor siempre que dichas circunferencias sean exteriores.

255. Determinar el centro radical de tres circunferencias que tienen como diámetros los lados de un triángulo.

256. Se considera un triángulo ABC; se construye la circunferencia que pasa por A y B, y que tiene su centro sobre AC, y la circunferencia que pasa por A y C y que tiene su centro sobre AB. Demostrar que el eje radical de estas dos circunferencias pasa por el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

257. Se considera un triángulo ABC. Una paralela a BC corta a AB en B' y a AC en C'. Determinar el eje radical de las circunferencias de diámetros BC' y CB'.

258. Construir una circunferencia que pase por dos puntos fijos y sea tangente a una circunferencia dada.

259. Dado un punto O como centro de inversión y la circunferencia de puntos dobles (C), hállese: *a)* El inverso de un punto A, que está fuera del círculo director. *b)* La figura inversa de una recta r. *c)* La figura inversa de una circunferencia que corte a la de puntos dobles. *d)* Ídem si no la corta. *e)* El inverso de un punto B colocado dentro del círculo director. En todos los casos, $K > 0$.

260. El mismo problema anterior si $K < 0$.

261. Dado el centro de inversión y un par de puntos homólogos, hallar: *a)* Otro par de puntos inversos. *b)* La figura inversa de una recta dada r.

262. Dados cuatro puntos alineados de modo que $\frac{AM}{AN} : \frac{BM}{BN} = -1$, probar que sus respectivos inversos también satisfacen a la misma relación, es decir, que

$$\frac{A'M'}{A'N'} : \frac{B'M'}{B'N'} = -1$$

263. Demostrar analíticamente que la figura inversa de $Ax + By + C = 0$, recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia que pasa por dicho centro.

264. Dados tres círculos, hallar el centro de inversión, de modo que los círculos inversos tengan sus centros alineados.

265. Trazar una circunferencia (C) que pase por dos puntos A y B y corte a otra circunferencia C_1, según un ángulo dado.

266. Trazar una circunferencia que sea tangente a una recta dada r y a una circunferencia dada C y que pase por un punto P.

267. Trazar una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas C, C' y que pase por un punto P.

268. Dada una recta r, una circunferencia C y un punto P de su plano, trazar por este punto una recta que determine en la circunferencia y en la recta dadas dos puntos A y B tales que el producto de sus distancias a P sea igual a un número k.

269. Trazar por un punto P una circunferencia que forme ángulo dado con otras circunferencias dadas.

270. Por un punto dado P trazar una recta que corte a los lados de un ángulo dado en A y B de tal modo que $PA \cdot PB = a^2$, siendo a un segmento dado.

271. Demostrar que una circunferencia cualquiera que pase por las intersecciones de otras dos, corta, bajo el mismo ángulo, a un sistema de circunferencias tangentes a las dos dadas.

272. Demostrar que el producto de dos giros de ángulo π y cuyos ejes se cortan es un giro cuyo eje es perpendicular al plano de los ejes considerados en su punto de intersección, y cuya amplitud es el doble de la del ángulo de dichos ejes.

273. Demostrar que el producto de dos giros cuyos ejes se cruzan es igual al producto de dos giros de ángulo π, cuyos ejes se cruzan.

274. Demostrar que el producto de dos giros de ejes paralelos es un giro o una traslación.

275. Estudiar el producto de una traslación y de un giro alrededor de un eje perpendicular a la recta soporte del vector $\vec{V}$ que define la traslación.

276. Demostrar que un movimiento que deja invariantes dos direcciones orientadas es una traslación.

277. Determinar los elementos de simetría de un tetraedro regular.

278. Encontrar los elementos de simetría de un prisma recto cuya base es un polígono regular de n lados.

279. Encontrar los elementos de simetría de una elipse.

280. Demostrar que un número impar de simetrías axiales es un movimiento.

281. Demostrar que una simetría respecto a un plano por una simetría respecto a un punto es un movimiento.

282. Demostrar que el conjunto de los movimientos helicoidales del mismo eje, es un subgrupo de los movimientos directos.

283. Hallar el movimiento helicoidal que transforma el triángulo $A'B'C'$ en su igual ABC: *a)* Si tienen doble el vértice $C \equiv C'$. *b)* No tienen ningún punto doble.

284. Dados dos movimientos helicoidales, cuyos ejes se cruzan, ¿cuándo su producto será una traslación?, ¿y un giro?

285. Hallar el movimiento helicoidal que transforma un tetraedro en otro directamente igual a él.

286. ¿Cuándo existe un movimiento helicoidal directo que transforma un triedro en otro igual?

287. Dada una esfera determinar su radio.

288. Trazar sobre la superficie esférica, la circunferencia máxima que pase por dos puntos de dicha esfera.

289. Dividir un arco dado en dos partes iguales, por medio de una circunferencia máxima perpendicular a dicho arco.

290. Trazar sobre una superficie esférica la circunferencia menor que pase por tres puntos dados.

291. Demostrar que si un hexaedro es inscriptible en una esfera, sus caras son cuadriláteros inscriptibles.

292. Construir un triángulo esférico rectángulo conociendo: 1), un cateto y la hipotenusa; 2), un ángulo oblicuo y el cateto opuesto.

293. Construir un triángulo esférico conociendo los tres lados.

294. Construir un triángulo esférico del que se conocen los tres ángulos.

295. Por un punto dado de una superficie esférica hacer pasar una circunferencia máxima tangente a otra menor dada.

296. Demostrar que el área de un triángulo esférico es al área de la esfera correspondiente, como el exceso de este triángulo esférico es a ocho ángulos rectos.

297. Calcular el área de un triángulo esférico en función del exceso esférico.

298. Hallar el valor de tg 1.278°, cos 285°, cosec $-3.875°$.

299. Hallar los lados de los triángulos polares correspondientes a los triángulos esféricos siguientes:

$A_1 = 70°\ 25'$, $B_1 = 56°\ 8'$, $C_1 = 112°\ 35'\ 7''$,
$A_2 = 118'7°$, $B_2 = 77'9°$, $C_2 = 86'3°$.

300. Demostrar que si los tres ángulos de un triángulo esférico son rectos, el triángulo tiene por lados tres cuadrantes.

301. Probar que si un triángulo esférico tiene dos ángulos rectos, los lados opuestos a estos ángulos son cuadrantes y el tercer ángulo tiene por medida el lado opuesto.

302. Calcúlese: $\log (\text{tg } 287° \ 17' \ 23'' \cdot \sec 118° \ 34'')$

$$\log (\bar{2}'34589 \cos 29843')$$

303. Calcular: $\dfrac{\bar{2}'784 \text{ tg } 2837'}{\text{sen } 317° \ 22' \ 55''}$

304. Dado un triángulo esférico ABC, si D es un punto cualquiera del lado BC, demostrar que

$$\cos AD \operatorname{sen} a = \cos c \operatorname{sen} DC + \cos b \operatorname{sen} BD$$

305. En un triángulo equilátero esférico, se verifica que:

$$1 + \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\cos A} \quad \text{y} \quad 2 \cos \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = 1. \quad \text{Demuéstralo.}$$

306. Un globo dirigible empieza su ascensión en el punto A de una llanura, y el viento que sopla en la dirección AH le obliga a seguir una trayectoria inclinada que forma con la vertical un ángulo $\varphi = 11° \ 47' \ 20''$. Al llegar a una cierta altura, el observador mide el ángulo de depresión del punto H del terreno, que resulta ser $\alpha = 24° \ 27' \ 25''$, y a otra altura superior a la primera en 200 m, vuelve a medir el ángulo de depresión de H, obteniendo $\beta = 48° \ 32' \ 58''$. Averiguar la altura a que se hizo la primera medida y la distancia horizontal AH.

NOTA. — Se llama ángulo de depresión al formado por la visual y la horizontal.

307. Un submarino, cuyas velocidades sumergido y en superficie son de 10 y 20 Km/h, respectivamente, se encuentra situado en un punto P a 30 Km del centro O de un círculo de 60 Km de radio, estrechamente vigilado por una escuadra enemiga, lo que le obliga a navegar sumergido mientras está dentro del círculo. Se pide determinar el menor tiempo necesario para que el submarino se traslade al extremo opuesto del diámetro que pasa por P.

Resolver los siguientes triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros:

308. Catetos: $c = 25° \ 18'$ y $a = 32° \ 41'$.

309. Ángulos oblicuos: $C = 50° \ 20'$, $B = 122° \ 40'$.

310. Un ángulo oblicuo $B = 107° \ 30'$, un cateto $b = 132° \ 25'$, $C = 90°$.

311. Un ángulo $C = 112°$, hipotenusa $b = 81° \ 50'$.

312. Un ángulo oblicuo $A = 161° \ 52'$, un cateto $b = 131° \ 8'$.

313. Un cateto $b = 69° \ 12'$, hipotenusa $a = 82° \ 35'$.

Resolver los siguientes triángulos:

314. $B = 69° \ 45'$, $C = 94° \ 40'$, $a = 90°$.

315. $B = 139° \ 10'$, $a = 142° \ 50'$, $c = 90°$.

316. $A = 105° \ 53'$, $a = 104° \ 54'$, $b = 90°$.

317. $a = 159°$, $c = 95° \ 18'$, $b = 90°$.

318. Demostrar que en el triángulo esférico rectángulo en A se satisface:

$$\cos^2 B \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sen} (a+b) \operatorname{sen} (a-b).$$

319. Dado el triángulo esférico A, B, C, a, b, c, hallar: 1.º La altura esférica referida al lado a. 2.º La distancia de A al plano BOC, siendo O el centro de la esfera. (Se llama altura esférica de un triángulo esférico al arco de círculo máximo perpendicular a un lado y que pasa por el vértice opuesto).

320. Demostrar que en un triángulo rectángulo esférico se verifica:

$$\operatorname{tg} c \cos a = \operatorname{sen} b \operatorname{cotg} B.$$

321. Un paquebote sale de un puerto que está situado en el ecuador para trasladarse a otro puerto situado sensiblemente en el mismo ecuador, con una velocidad horaria de 40 Km./h. Al cabo de 12 horas de navegación recibe un radiograma en el que le pide auxilio otro situado precisamente en el mismo meridiano en que se encuentra en ese momento, y a 500 Km. de distancia, lo cual le obliga a dirigirse al lugar del siniestro a marchas forzadas, es decir, a 50 Km./h. Cuando lleva navegando 8 horas en esa dirección recibe aviso de que sus servicios no son necesarios, pues el barco siniestrado ha sido socorrido, lo que le hace tomar rumbo al puerto que primeramente se dirigía. ¿Cuánto habrá alargado su viaje, si este puerto está a 18° 36′ del primero?

322. Un triedro cuyos diedros A, B y C, miden, respectivamente, 90°, 68°, 70°, es cortado por un plano de modo que sus aristas miden 5 m. cada una. Calcúlese la longitud de los segmentos que unen los extremos de dichas aristas y el volumen del triedro resultante.

323. Un avión que vuela en dirección Este, con ruta ortodrómica, sale de un punto A (40°, 35′ lat. N., 63° 25′ long. O.), si tarda 10 h. 20 m. en llegar a su destino, cuáles son las coordenadas geográficas de este último lugar, sabiendo que su velocidad es de 495 Km./h. Radio terrestre = 6.370 Km.

324. Calcula la longitud de la cuerda de un círculo menor terrestre de 47° latitud Norte, comprendida entre dos meridianos cuyas longitudes son 13° O. y 35° E.

325. Un punto A de la Tierra tiene las coordenadas (36° 58′ lat. N., 5° 26′ longitud O.). Se sabe que el arco AB = 42° 45′ 12″, y que dicho arco forma con el meridiano que pasa por A un ángulo de 110° 1′ 54″, contado a partir de dicho meridiano desde el Sur hacia el Este. Se pregunta: *a)* Coordenadas de B. *b)* El ángulo que forma AB con el meridiano de B.

326. Un avión sale de Madrid (40° 24′ lat. N., 3° 41′ long. O.) en dirección de Caracas (10° 2′ lat. N., 67° 15′ long. O.), ¿qué dirección ha de tomar su rumbo a la salida si sigue una línea ortodrómica?

327. El avión del ejemplo anterior, ¿qué dirección llevará su rumbo al cabo de 8 h. de vuelo, si su velocidad es de 650 Km./h.?

328. ¿Cuáles serán las coordenadas geográficas del punto en que se hizo la observación del caso anterior?

329. Hállese la distancia entre Madrid y Caracas.

330. Dos ciudades están situadas en el círculo menor de 60° N., a 3° y 28° de longitud E. Hállese la diferencia de caminos para ir de una a otra, siguiendo el paralelo o el círculo máximo.

331. Un avión a reacción hace la travesía París (48° 50′ lat. N., 2° 25′ long. E.), Nueva York (40° 43′ lat. N., 74° 0′ longitud O.) en 6 h. ¿Qué velocidad horaria llevará?

332. ¿Entre qué valores ha de estar comprendida la declinación de un astro para que tenga orto y ocaso en Valladolid (41° 37′ lat. N., 4° 40′ long. O.)? ¿Y para que permanezca constantemente sobre el horizonte? ¿Y para que no sea visible nunca?

333. ¿Cuál es la máxima altura de un astro de 14° 35′ de declinación N. para un observador de La Coruña (43° 20′ lat. N., 8° 19′ long. O.). Calcúlese las coordenadas del punto donde tiene su ocaso ese astro. ¿Entre qué valores varía su azimut en un día?

334. Un astro, que hace 2 h. pasó por el meridiano del lugar, tiene una distancia cenital de 45°. Si la observación tiene lugar en Burgos (42° 19′ lat. N., 3° 34′ longitud O.). ¿Cuál es la declinación del astro?

335. ¿A qué hora tendrá su ocaso el astro anterior para el mismo observador si la primera observación se hizo a las 11 h. de la tarde?

336. Un día en que el sol tiene una declinación de 20°, ilumina, al mediodía, y en un lugar cuya latitud es 39° 42′, un mástil de 35 m. de altura, colocado frente a un muro orientado hacia el Sur, del que dista 10 m. Se pregunta cuál es la longitud de la sombra proyectada sobre la pared.

337. En un lugar son las 15 h. 20 m. de tiempo sidéreo, ¿qué ángulo horadio corresponderá a una estrella de 17° 45′ de azimut O., 25° 41′ de altura N. y 10° 37′ de declinación? ¿Cuál será su ascensión recta?

338. ¿A qué hora se pone el Sol en un lugar de 37° 46′ de lat. N. si se sabe que tiene una ascensión de 233° 50′ 32″?

339. Un alumno del Preuniversitario desea fabricar un reloj de sol, y para ello elige un pivote paralelo al eje del mundo (en dirección a la estrella polar), sobre un plano perpendicular en su pie. Si son las 3 h. 25^m en el momento que ha de señalar las horas, ¿cómo lo realizará? Ese reloj marcará la hora exacta. ¿Por qué?

340. En el reloj anterior, ¿dónde se proyectará la sombra en el ocaso si está en Madrid y es el día del equinoccio de primavera?

341. ¿Qué ascensión recta tendrá el Sol cuando se le vea por primera vez cada año en un lugar del casquete ártico, situado a 18° 30′ del polo?

342. ¿Qué duración tendrá el día en Oslo (60° 30″ lat. N.), cuando el Sol tenga declinación máxima? ¿Y cuando la tenga mínima?

343. En un anuario astronómico, un alumno lee que la ascensión recta del Sol un día determinado es 63° 50′ 3″. Si ese día la sombra de un mástil vertical de 7 m., mide 4'74 m. a las 10 h. 25 m. de la mañana, ¿cuál es la latitud del lugar?

344. Construir un cuadrado, conociendo la suma l de la diagonal y el lado.

345. Dado un triángulo escaleno ABC, por un punto O de la base, trazar dos rectas de manera que los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ determinados sobre ellas por los otros dos lados tengan por suma una longitud dada l, y que para cualquier otro punto de la base las paralelas a las anteriores cumplan la misma condición.

346. Por un punto dado M, trazar una secante a una circunferencia dada tal que el ángulo inscrito LFG, que corresponde a la cuerda interceptada GL, sea igual a un ángulo dado AHB.

347. Construir un cuadrilátero conociendo los ángulos y dos lados opuestos.

348. En una circunferencia dada inscribir un triángulo isósceles, conociendo la suma l de la base y de la altura.

349. Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias trazar una secante tal que la diferencia de cuerdas tenga una longitud dada, $2\,d$.

350. Determinar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las circunferencias tangentes dos a dos, y tangentes a dos circunferencias dadas.

351. Dada una circunferencia, una recta y un punto sobre esta recta, encontrar un segundo punto de esta misma recta, que equidista del punto dado y de la circunferencia.

352. Con un radio dado r, describir una circunferencia que pase por un punto dado A, de modo que la mínima distancia a una circunferencia dada de centro B, sea una longitud dada e.

353. Trazar una secante a dos circunferencias de modo que las cuerdas interceptadas por cada una de estas circunferencias tengan longitudes dadas l y l'.

354. Dados dos puntos A y B de una circunferencia, determinar sobre esta circunferencia un tercer punto C, tal que la suma de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, sea igual a una longitud dada l.

355. Dado un triángulo ABC, determinar una circunferencia que corte a cada uno de los lados del triángulo, bajo un ángulo dado x.

356. Con un radio dado, trazar una circunferencia que pase por un punto A y que corte a una circunferencia dada C, bajo un ángulo dado.

357. Construir un triángulo conociendo el perímetro y los ángulos.

358. Se dan en un plano dos rectas paralelas r y r', y a uno y otro lado de la zona determinada por ellas, dos puntos fijos A y B.

Encontrar sobre r un punto M, y sobre r' un punto M', tales que, dada además la dirección de la recta MM', se verifique:

1.º *a)* $AM = \overline{M'B}$; *b)* $AM \perp BM'$.

2.º Que el camino total $AM + MN' + M'B$ sea mínimo.

359. Dadas dos circunferencias exteriores, trazar una secante a dichas circunferencias, paralela a una dirección dada, y tal que la suma de las cuerdas obtenidas tenga una longitud dada l.

360. Un movimiento inverso del plano hace corresponder a la semirrecta de origen A (1, 0), situada en el eje de abscisas y de sentido positivo, la semirrecta de origen A' (2, 2), situada en la bisectriz del primer y tercer cuadrante del sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales, y toda ella en el primer cuadrante. Se pide:

a) Hallar una simetría axial y un giro de cuyo producto resulte el movimiento dado.

b) Hallar una traslación y una simetría axial, de cuyo producto resulte el movimiento dado.

c) Hallar en el movimiento dado, la circunferencia homóloga de la que tiene por centro el punto $B\,(3;\ -1)$ y radio 2.

361. Se consideran dos giros de distintos centros O_1 y O_2 y del mismo sentido. El primer giro es de 80°. ¿Qué amplitud debe tener el segundo giro para que el producto de ambos sea una simetría?

362. Demostrar que el producto de dos giros de centros diferentes y de sentido contrario e igual amplitud, es una traslación. ¿Cómo han de ser los giros para que la citada traslación tenga por amplitud el doble de la distancia entre los centros de giro?

363. A la circunferencia k, de ecuación $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$ se le da un giro G de 60° alrededor del origen de coordenadas, transformándose así en la circunferencia k'. A ésta se aplica una homotecia H de razón 2, cuyo centro está en el centro de la primera circunferencia, transformándose k' en la circunferencia k''. Obtener la ecuación de esta última circunferencia y las coordenadas del centro de homotecia negativa de las circunferencias k' y k''.

364. Demostrar que el producto de dos giros de distintos centros de distintos sentidos y ángulos iguales, es una traslación. (Sugerencia: descompóngase para multiplicar los giros en productos de simetría). Si el ángulo de los giros es de 60° y la distancia de los centros 4 cm., calcular la amplitud de la traslación producto.

365. Las circunferencias C_0, C_1, C_2, ... C_n, ... son tangentes a las rectas a y b, que se cortan en P, y cada una C_n, es tangente a la siguiente, de menor radio, C_{n+1}. Llamaremos O_n al centro de C_n, r_n a su radio, A_n al punto de tangencia de a con C_n, B_n al de tangencia de b con C_n y d_n a la distancia PO_n. Supondremos que $r_0 = 1'5$, y $d_0 = 6$ cm. Se pide:

1.° Determinar la razón de homotecia de centro P que transforma cada circunferencia C_n en la siguiente C_{n+1}.

2.° Determinar la potencia de la inversión de centro P que transforma las circunferencias C_0, C_1, C_2, C_3, en las C_3, C_2, C_1, C_0, respectivamente.

3.° Hallar el radio del círculo de autoinversión.

4.° Hallar el área de la figura mixtilínea limitada por a y b y el arco A_0B_0.

366. Las circunferencias C_0, C_1, C_2, ..., C_n ... son todas tangentes a las rectas a y b, que se cortan en P, y cada una, C_n, es tangente a la siguiente, de menor radio, C_{n+1}. Llamaremos O_n al centro de C_n, r_n a su radio, A_n al punto de tangencia con a, T_n al de tangencia con C_{n+1} y d_n a la distancia PO_n. Supondremos que $r_0 = 3$ cm. y $d_0 = 12$ cm. y se pide:

1.° Expresar r_n y d_n en función de n.

2.° Calcular el límite de la suma de las áreas de todos los círculos C_0, C_1, C_2, ...

3.° Demostrar que los triángulos A_n, T_n, A_{n+1} son semejantes y rectángulos en T_n.

367. Por homotecia, resolver el problema siguiente: Dada una circunferencia de centro O y los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ que no están en prolongación, trazar una cuerda MN (de aquella circunferencia) que sea dividida por $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ en tres segmentos iguales.

368. Dadas dos circunferencias secantes, trazar por uno de los puntos de intersección P, una recta tal que la longitud de una de las cuerdas sea $\frac{1}{3}$ de la otra.

369. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, $x^2 + y^2 = 9$, se pide:

Calcular las coordenadas de sus centros de homotecia y la distancia d entre ambos. Centro de la primera $O_1(3, 4)$, de la segunda, $O(0, 0)$.

370. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 = 0'49$ y $x^2 + y^2 - 2y + 0'96 = 0$, hallar:

a) Las coordenadas de los centros de homotecia directa e inversa.

b) Sin tablas, calcular la longitud de la correa de transmisiones que enlaza las dos ruedas representadas por dichas circunferencias, cuyos radios suponemos expresados en metros.

371. Considérese un triángulo escaleno. Tracémosle la circunferencia circunscrita al mismo y la circunferencia que pasa por los pies de las medianas. *a)* Demostrar que dichas circunferencias son homotéticas. *b)* Hallar el centro y la razón de homotecia. Determinar la posición de los centros de las circunferencias anteriores respecto al centro de homotecia.

372. Las hipotenusas de dos triángulos rectángulos semejantes están sobre dos rectas m y m', que se cortan en un punto P, y forman un ángulo de 30°. Los vértices B y C del primero distan de P, $PB = 1$, $PC = 6$, y los B' y C' del segundo, homólogos de B y C, $PB' = 2$ y $PC' = 4'5$. Los catetos del primer triángulo miden $b = 4$ y $c = 3$. Sabiendo que la semejanza entre los dos triángulos es directa, se pide:

a) Hallar el centro o punto doble de la semejanza.

b) Dibujando el primer triángulo ABC, hallar A' homólogo del vértice A del ángulo recto del primero, utilizando el giro y la homotecia, de cuyo producto resulta la semejanza.

373. Dada la ecuación:

$$x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$$

1.° Hallar sus raíces.

2.° Hállense los intervalos de crecimiento y concavidad de $y = x^3 + 7x^2 - 21x - 27$.

3.° La ecuación de la curva inversa respecto al punto $P(3, 0)$ y potencia 5.

374. Construir un triángulo conociendo $h_a = 1\ m$, $a = 1\ m$ y $b = 3\ m$. Calcular los ángulos B y C del triángulo anterior.

375. El polinomio $x^3 - 2x^2 - 15x - x^2\sqrt{3} + 2x\sqrt{3} + 15\sqrt{3}$ se anula para los valores $x = \sqrt{3}$ y $x = -3$. 1.° Determinar otro valor de x que también lo reduzca a 0. 2.° Tomando en orden creciente los valores que anulan al anterior polinomio como abscisas de tres puntos A, B, C, hallar un cuarto punto D, tal que $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1$. 3.° Hállese la ecuación de la tangente a la curva correspondiente si su pendiente toma el valor de $-15 + 2\sqrt{3}$.

376. En un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, el origen de coordenadas es el centro de una inversión, en la que son homólogos los puntos $A(2, 0)$ y $A'(3, 0)$. Se pide:

a) Hallar la circunferencia de puntos dobles y la constante de inversión.

b) Dibujar la figura inversa del triángulo MNP, cuyos vértices son $M(2, 2)$, $N(-1, -1)$ y $P(2, -1)$.

377. Comprobar, y generalizar por inducción

$$1 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

378. Dada la función $y = \frac{x^3 - 16}{x^2 + 4}$: *a)* Hallar los máximos y mínimos entre los puntos de abscisas -4 y 6. *b)* Se consideran los valores de la función correspondiente a los valores de $x = -4, -2, 0, 4, 16$, hallar la desviación típica.

379. *a)* Sea el polinomio $4x^3 - 36x^2 + 33x + m$. Hallar el valor de m, sabiendo que dividiendo este polinomio por $x + 2$, da de resto -250.

b) Hallar las raíces del polinomio sabiendo que una de ellas es doble.

380. *a)* Demostrar que si un número es divisible por varios otros, lo es por su m. c. d.

b) Hallar dos números tales que uno sea divisible por 20, 30 y 35 y la diferencia de cuadrados sea 529.200.

381. Dado un triángulo rectángulo OAB, cuyos catetos miden: $\overline{OA} = 2\sqrt{3}$ decímetros; $\overline{AB} = 2$ decímetros.

Se construye la figura inversa $\overline{AB'}$ del segmento $\overline{AB}$ respecto al punto O como centro de inversión y potencia = 12. Se pide:

a) Las longitudes de los segmentos de recta $\overline{AB'}$ y $\overline{BB'}$.

b) La longitud del arco de curva $\overset{\frown}{AB'}$.

c) El volumen del cuerpo engendrado por el triángulo mixtilíneo OAB' (OA y OB', rectas; AB', arco de curva) al girar alrededor de OA una vuelta completa.

382. Dada una circunferencia de centro O y radio $r = 3$ cm, un punto P, tal que PO sea igual a 2'5 cm, y un diámetro AA' de dicha circunferencia distante de P, $PD = 1'5$ cm, se pide:

1.º Hallar una recta que pasando por P, corte a la circunferencia en M y al diámetro AA' en N, tal que $PM \cdot PN = 9$.

2.º Calcular el área y el perímetro del dodecágono regular inscrito en la circunferencia dada.

383. Resolver la ecuación $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$, sabiendo que las raíces están en progresión aritmética.

384. Tomando como centro de inversión al origen de coordenadas y potencia $p = 63$ m, hallar: 1.º La ecuación de la circunferencia inversa de la $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$. 2.º Coordenadas del punto inverso de cada uno de los centros de dichas circunferencias. 3.º Volumen del tronco de cono resultante al girar alrededor del eje X la figura limitada por las circunferencias engendradas por los puntos de contacto de las tangentes comunes exteriores.

385. En una circunferencia de 12 m de radio se toma un punto O que diste 2 m del centro. Por O se trazan tres rectas, que cortan a la circunferencia en los puntos A, B, C, D, E, F, que unidos forman un hexágono inscrito.

1.º Demostrar que A, D; B, E, y C, F, son pares de puntos homólogos en una inversión de centro O, y calcular la potencia de esta inversión.

2.º Demostrar que los pares de triángulos que se forman, opuestos por el vértice en O, son semejantes.

3.º Demostrar que se verifica la siguiente igualdad:

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$$

386. El centro de una inversión es el origen de coordenadas, y dos puntos homólogos son A (2, 0) y A' (4, 0). Encontrar la transformada de la recta $x = 3$.

La circunferencia de centro (6, 0) y radio 1, es homotética con la anterior. Encontrar el centro de homotecia directa que las enlaza.

Hallar el área del cuadrilátero formado por las tangentes exteriores y las cuerdas de los puntos de contacto.

387. Dos circunferencias tangentes exteriormente son inversas respecto del origen de coordenadas como centro de inversión. La mayor tiene por ecuación $x^2+y^2-26x+144=0$. Calcular: *a)* La potencia de inversión. *b)* Radio y centro de la circunferencia menor. *c)* ¿Cuál es la figura inversa de la recta perpendicular al eje X, trazada por el punto inverso del centro de la circunferencia dada? *d)* Coordenadas de los puntos dobles en dicha recta.

388. Las circunferencias h y k de ecuaciones $x^2+y^2+9x-36=0$ y $x^2+y^2-16x-36=0$, pueden transformarse, por medio de una inversión, en dos rectas h' y k'. Obtener las coordenadas de los posibles centros de inversión y eligiendo el de la ordenada mayor y tomando por potencia de la inversión el número 144, obtener las ecuaciones de las rectas h' y k' y calcular el ángulo que forman las circunferencias h y k.

389. 1.º Determinar dos arcos cuya suma vale a, y s la suma de sus senos.

2.º Aplicar el resultado al caso en que $a = \frac{\pi}{2}$, $s = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

390. A, B, C, D, E, F, son los vértices consecutivos de un hexágono inscrito en un círculo de centro O y radio r. Se pide:

1.º El punto X alrededor del cual ha de girar el segmento $\overline{PQ} = \overline{AB}$ $(P \equiv A,\ Q \equiv B)$ para que P pase a coincidir con O y Q con D.

2.º Calcular en función de r el volumen del cuerpo engendrado por el triángulo XAB al girar 360° alrededor del eje OX.

3.º El área de la corona circular limitada por la circunferencia de radio $\overline{XA}$ y $\overline{XB}$; el perímetro y el área del recinto barrido por el segmento $\overline{PQ}$ en su giro alrededor de X.

391. Se da una esfera de radio R y se construye un cono de revolución, cuya base sea un círculo máximo de dicha esfera y cuyo volumen sea la mitad del de la esfera. Se pide:

a) Altura de dicho cono.

b) Radio de la circunferencia menor, según la cual se cortan la esfera dada y el cono.

392. Resolver las siguientes cuestiones:

a) Calcular el radio de la esfera tangente a las aristas de un tetraedro regular, sabiendo que la longitud de una de dichas aristas es 12 centímetros.

b) Calcular el volumen del tetraedro que resulta al trazar por cada uno de los vértices de un tetraedro regular el plano paralelo a la cara opuesta.

393. Un cilindro inscrito en una esfera de radio R tiene su área lateral igual a la de un círculo máximo de la esfera. Hallar:

a) Las áreas lateral y total de dichos cilindros.

b) Volumen de uno de los segmentos esféricos de una sola base, cuya base es la del cilindro.

394. De un triángulo se conoce $a = 15$ cm, $B = 45°$, $C = 75°$. Se desea hallar, sin utilizar tablas:

a) La altura h_a.

b) La mediana m_a.

c) La distancia del baricentro del triángulo, al lado a.

395. Calcular P y Q sabiendo que m. c. m. $(P, Q) = M$, siendo M el número de puntos de corte de las diagonales de un decágono convexo, interiores al polígono, y m. c. d. $(P, Q) = D$, siendo D la abscisa del punto en el cual la tangente a la curva: $y = x^2 - 16x + 5$ es paralela a la recta $4x - y + 7 = 0$.

396. En la esfera de radio $R = 2$ dm se consideran los puntos medios A, B, C, de los lados de un triángulo esférico trirrectángulo formado por dos cuadrantes de meridiano y un cuadrante de ecuador. Calcular sin tablas:

a) Las medidas en radianes de los lados del triángulo esférico ABC.

b) Los cosenos de los ángulos de dicho triángulo.

c) El área del triángulo rectilíneo plano $A'B'C$, siendo A' y B' las proyecciones ortogonales de A y B sobre el plano del ecuador que pasa por C.

397. Dada la función:

$$y = \frac{4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2}{4x^5 - 5x^3 + x}$$

determinar:

a) Los valores para los cuales se anula.

b) Los valores para los cuales es indeterminada.

c) El verdadero valor de la función en los puntos obtenidos en *b)*.

d) Representar gráficamente la función para $-4 < x < +4$.

Calcular además la suma de todos los divisores de N.

398. En el día del equinoccio de primavera se ha medido en Madrid la sombra de un 25 centímetros. ¿Qué hora era? (Latitud de Madrid, 40° 24′ 29″).
lápiz, en posición vertical, de 15 cm. La medición fue efectuada después del mediodía, y dio

399. La latitud de un lugar de la Tierra es 48° 19′. La altura del Sol a las 6 de la mañana es de 10° sobre el horizonte. Calcular la declinación de ese astro en ese día.

400. Demostrar que el cuadrado del número *nnnn* en el sistema de base $n + 1$, es el número *nnns*0001, siendo $s = n - 1$.

401. Demostrar que el m. c. d. de los polinomios

$$A(x) = x^4 - 14x^3 + 48x^2 + 14x - 49,$$
$$B(x) = x^3 - 15x^2 + 63x - 49, \quad \text{es } B(x).$$

Hallar:

a) Los puntos de intersección de la curva $y = \frac{1}{8} B(x)$ con los ejes de coordenadas.
b) Máximo, mínimo y ecuación de la tangente a dicha curva en su punto de inflexión.
c) Calcular el área de la superficie comprendida entre la curva y el eje X.

402. Se tiene un billar circular y una bola colocada en un punto A; ¿en qué dirección se tendrá que impulsar la bola para que vuelva a pasar por el punto A después de dos inflexiones sucesivas (Alhazen).

403. Determinar las circunferencias tangentes a otras tres dadas (Apolonio).

404. Dados tres puntos, A, B, C, encontrar un punto desde el cual los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son vistos bajo ángulos dados (Pothenot).

405. Determinar un punto tal que la suma de distancias a tres puntos distintos sea mínima (Fermat).

406. En el sistema de numeración de base n, la suma de los números obtenidos permutando las cifras 1, 2, 3, 4, 5, es 2292259. Calcular la base n.

407. Probar las siguientes relaciones entre números naturales: *a)* El cuadrado de un número par es múltiplo de 4, y el cuadrado de un número impar es múltiplo de 4, más 1. *b)* Si a, b y c son números primos entre sí, que satisfacen a la relación $a^2 = b^2 + c^2$, se verifica que de los números b y c, uno es par y el otro impar, y además a es impar. *c)* Con la misma hipótesis del apartado anterior y suponiendo que b sea de los números b y c el par, demostrar que $m = a + b$ y $n = a - b$ son primos entre sí. *d)* Expresar a, b y c, en función de m y n.

408. Determinar todos los números que en el sistema decimal se escriben con tres cifras y que en el sistema de base 7 tienen también tres cifras respectivamente dobles de aquéllas.

409. Hallar los caracteres de divisibilidad por 6 y $11_{(7}$ en el sistema de numeración de base 7. Una vez obtenidos, resolver las siguientes cuestiones:

a) ¿Es divisible por 6 u $11_{(7}$ el número $4_1251.644_{(7}$?

b) En caso de no serlo, sustituir la cifra 2 por otra, para que el número que resulte sea divisible por 6 y $11_{(7}$.

410. Hallar un número entero N sabiendo que no tiene más factores que 2, 5 y 7, que

$5N$ tiene 8 divisores más que N
y que $8N$ tiene 18 divisores más que N

411. Hallar las tres raíces de la ecuación: $Ax^3 + \frac{B}{C} = 0$, siendo:

A = el número que en el sistema de numeración decimal equivale al $0,\widehat{12}$ en el sistema de base 3.

B = el número de números distintos de siete cifras que se pueden formar con las 5, 3, 4, 0, 0, 0 (los que empiecen por cero no deben considerarse).

C = el valor de c, que hace incompatible el sistema:

$$3x - 2y = 4$$
$$9x - cy = 7$$

412. *a)* Hallar el número que admite sólo los factores primos 2 y 3 y la suma de sus divisores es 28. *b)* Hallar dos números A y B, conociendo $A - B = 990$ y su m. c. m. $= 273581$.

413. Se designa por S el menor número que tiene 15 divisores positivos y por D la base del sistema de numeración en que tres números en progresión aritmética se escriben 216, 222, 226. Calcular S y D y resolver el sistema $a - b = S$, m. c. d. $(S, b) = D$.

414. Siendo $28 \equiv 52 \equiv 88$ (mod. m), calcular m. Construye la tabla de multiplicar de las clases de restos (mod. 7) y con su auxilio, resuelve la ecuación de congruencia $26x + 16 \equiv 30x - 15$ (mod. 7).

415. Demostrar por inducción que todas las potencias del número $n = 12890625$, terminan en estas mismas ocho cifras.

416. Por el método de los coeficientes indeterminados, encontrar los valores A, B y C, que verifiquen la igualdad:

$$\frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

417. Calcular los restos potenciales de 7, de 11 y de 13 y demostrar que todo número de la forma *abcabc* escrito en numeración decimal, es divisible por el número 1001. Demostrar que el producto de $4n$ enteros consecutivos es divisible por 2^{3n}.

418. Un polnomio $P(x)$ dividido por $x + 1$ da de resto -45; dividido por $x - 3$ da de resto -165. ¿Qué resto dará al dividirlo por $x^2 - 2x - 3$? Determinar $P(x)$ sabiendo, además, que es de cuarto grado y divisible por $x(x^2-4)$. Resolver en este caso la ecuación $P(x) = 0$.

419. Hallar los valores de A, B, C, para que la igualdad

$$A(x-y) + B(2x+3y+5z) + C(3x+2y+5z) = 0$$

se verifique para todo valor de x, y, z.

420. Averiguar en cuántos ceros termina: $1_1000.000!$.

421. Demostrar que el número 44944 representa un cuadrado perfecto en todo sistema de numeración de base $n > 9$. Hallar el valor de la raíz de dicho número cuando $n = 12$ y pasar el resultado a base 5.

422. Si dos números a y b son primos entre sí, hallar el m. c. d. del producto y la suma $(ab, a + b)$, y del producto y la diferencia $(ab, a - b)$.

423. Hallar dos números a y b, conociendo su suma S y su m. c. m., M.

424. Dada una colección de pesas de 1, 2, 4, 8, 16, ... Kg y una sola de cada tipo, pesar con ellas una Tm.

425. Dada una colección de pesas de 1, 3, 9, 27, ... kilos, una sola de cada tipo, pesar con ellas un Qm, pudiendo ponerse pesas en ambos platillos.

426. Determinar λ y μ en el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= \lambda \\ 3x - y &= \lambda - \mu \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

para que sea compatible.

427. Demostrar por inducción que el número

$$N = \underbrace{111\ldots1}_{n}\,2\,\underbrace{888\ldots8}_{n-1}\,96$$

es un cuadrado perfecto.

428. Se considera un cuadrado de lado 3 cm. Construir gráficamente la figura transformada de dicho cuadrado en una inversión positiva que tenga por centro uno de los vértices y por potencia 9. Rayar la parte de plano en que se transforma por la citada inversión la superficie del cuadrado.

ÍNDICE

LECCIÓN PRELIMINAR. — Integración 5

1. Conjuntos. Número natural. Concepto de semianillo 17
2. Las operaciones aritméticas con números naturales 24
3. Sistemas de numeración 34
4. Variaciones y permutaciones 41
5. Combinaciones. Propiedades de los números combinatorios 46
6. Conceptos de grupo y anillo 51
7. El número entero 56
8. Números congruentes en Z 65
9. Teoría de la divisibilidad en Z 73
10. Concepto de cuerpo 84
11. Números racionales Q 86
12. Sistemas de ecuaciones lineales. Equivalencia 98
13. Determinantes de segundo y tercer orden 102
14. Resolución de sistemas de ecuaciones. Regla de Cramer ... 110
15. División de polinomios de una variable. Principio de identidad 122
16. Distribuciones bidimensionales y rectas de regresión 131
17. Correlación. Coeficiente de correlación 137
18. Traslaciones en el plano 140
19. Los giros en el plano 145
20. Simetrías en el plano 153
21. Producto de traslaciones, giros y simetrías en el plano 160
22. Razón simple 165
23. Homotecia en el plano 171
24. Semejanza en el plano 178
25. Teoremas de Menelao y Ceva 183
26. Inversión en el plano 185
27. Traslación en el espacio 192
28. Giros en el espacio 195
29. Simetrías central y axial en el espacio 200
30. Simetrías respecto a planos en el espacio 204
31. Producto de traslaciones, giros y simetrías en el espacio ... 207
32. Geometría de la superficie esférica 211
33. Triángulos esféricos 220
34. Triángulos polares. Exceso esférico 229
35. Trigonometría esférica 234
36. Triángulos rectángulos y rectiláteros 241
37. Aplicación de la trigonometría esférica a la esfera terrestre. Coordenadas geográficas 247
38. Esfera celeste. Coordenadas astronómicas 251
39. Movimientos de la Tierra 259
40. Tiempo. Su medida 265
41. Calendario 269

EJERCICIOS 275